enthält, oder in derselben enthalten ist. Wenn man dies zu erfahren sucht, so mißt man etwas aus.

§. 5.

Die Geometrie oder Meßkunst ist daher eine Wissenschaft, aus einigen bekannten ausgedehnten Grössen andere noch unbekannte zu finden, die man zu wissen verlangt.

§. 6.

Die Erfindung dieser Wissenschaft schreibt man den alten Egyptiern zu, die wegen der Beschaffenheit ihres Landes auf Regeln denken mußten, nach welchen sich ein Feld ausmessen läßt. Nachher ist sie wegen ihres grossen Nutzens von verschiedenen Völkern mehr bearbeitet, mit neuen Erfindungen bereichert und allgemeiner angewendet worden.

§. 7.

Jeder Körper hat gewisse Grenzen, die ihn von allen Seiten umgeben. Die äusserste Grenze desselben nennt man die Oberfläche. Man kann sich auch gewisse Theile der Oberfläche allein vorstellen. Z. B. die ganze Oberfläche eines Würfels besteht aus sechs Flächen, welche diesen Körper von allen Seiten einschliessen. Eine jede Oberfläche des Körpers hat auch ihre Grenzen, welche Linien heissen. Eine jede Linie hat wiederum ihre Grenzen, welche Punkte genannt werden.

§. 8.

heißt ihr Mittelpunkt. Die gerade Linie (CB), welche vom Mittelpunkte zum Umfange geht, wird ein Halbmesser, und jeder Theil des Umfanges ein Bogen genannt.

§. 12.

In der gemeinen Geometrie werden keine andere Linien als gerade, und unter den krummen allein die Kreislinie betrachtet. Von diesen Linien nimmt man an, daß sie alle in einer und eben derselben Ebene liegen. Das Werkzeug, dessen man sich bedienet, ist der Zirkel und das Lineal, mit welchen alle Aufgaben ohne alles Versuchen aufgelöset werden. Wenn anderes Werkzeug gebraucht, oder das verlangte durch Versuche herausgebracht wird, so nennt man dieses Verfahren mechanisch.

§. 13.

Es wird vorausgesetzt, daß man sich des genannten Werkzeugs zu bedienen wisse, um auf einer Ebene

1) von jedem Punkte nach jedem andern eine gerade Linie zu ziehen,
2) dieselbe weiter fortzuziehen,
3) aus jedem Punkte mit einer verlangten Eröfnung einen Kreis zu beschreiben.

§. 14.

Der Kürze wegen bedient man sich folgender Zeichen:

+ zeigt an, daß die Grössen, zwischen welchen es steht, zusammen genommen wer-

werden sollen, als $4 + 9$, 4 und 9, zusammen genommen.

— bedeutet, daß die folgende Grösse von der vorhergehenden weggenommen werden soll, als $8 - 4$, 8 weniger 4.

= zeigt die Gleichheit derer Grössen an, zwischen denen es stehet, als $2 + 8 = 10$.

$>$ $<$ zeigen die Ungleichheit der Grössen an. Die Grösse, der die Oefnung des Zeichens zugekehrt ist, ist die grössere von beiden, als $6 > 4$, 6 ist grösser als 4, und $2 < 9$, 2 ist kleiner als 9.

Andere Zeichen werden an ihrem Orte vorkommen.

Der

Der Geometrie
Erster Theil.
Von den Linien.

I. Von den Linien und Winkeln überhaupt.

§. 15.

Aus dem Begriffe von einer geraden Linie folgt

1) Zwischen zween Punkten ist nur eine gerade Linie möglich.

2) Gleiche gerade Linien können einander decken, d. i. die eine kann so in die Stelle der andern gesetzt werden, daß ihre Grenzen gänzlich übereinkommen.

3) Unter allen Linien, welche zwischen zween Punkten möglich sind, ist die gerade die kürzeste.

4) Wenn sich in einer Ebene zwo gerade Linien (AB und CD) auf einer Seite (P) einander nähern, so durchschneiden sie sich auf eben derselben, wenn man sie weiter fortzieht. Fig. 2.

5) Sie durchschneiden sich aber nur einmal in einem einzigen Punkte (P), und entfernen sich darauf immer weiter von einander, je weiter man sie fortziehet.

§. 16.

Aus dem Begriffe von dem Kreise folgt

1) daß alle Halbmesser eines Kreises gleich sind,

Fig. 1. 2) daß, wenn mehrere Punkte (A, B, E) in einer Ebene von einem Punkte (C) gleich weit abstehen, aus diesem als dem Mittelpunkte ein Kreis beschrieben werden kann, der sie alle trift.

3) Wenn man den Umfang um seinen Mittelpunkt herum drehete, so würde zwar jeder Theil desselben in die Stelle eines andern kommen; in der Lage des ganzen Umfanges aber würde nichts verändert.

4) Daher können gleich lange Bogen eines Kreises einander decken.

§. 17.

Fig. 3. Zween Kreise durchschneiden einander, wenn der Umfang des einen theils innerhalb, theils ausserhalb des andern Kreises fällt. Dies geschieht jederzeit in zween Punkten (R und S) und der Mittelpunkt eines jeden Kreises (C und D) liegt von beiden Durchschnittspunkten gleich weit ab.

Fig. 4. Zween Kreise berühren einander, wenn beide zwar an einander stossen, übrigens aber der eine entweder ganz innerhalb oder ausserhalb des andern liegt. Dies kann nur in einem Punkte (R) geschehen, weil sonst diese Kreise einander durchschneiden würden.

§. 18.

§. 18.

Kreislinien, welche mit verschiedenen Halbmessern aus einem Mittelpunkte beschrieben sind, heissen concentrische Kreise, diejenigen aber, welche verschiedene Mittelpunkte haben, eccentrische Kreise.

Concentrische Kreise können einander weder durchschneiden, noch in irgend einem Punkte sich berühren. Wenn daher zwo Kreislinien auf irgend eine Art zusammen stossen, so sind es allemahl eccentrische Kreise.

§. 19.

Zween Kreise sind gleich groß, wenn ihre Halbmesser gleich sind. Denn wenn man beide Kreise so auf einander legt, daß ihre Mittelpunkte zusammen fallen, so ist nothwendig, daß auch die Peripherien auf einander fallen müssen, weil die Kreislinie auf allen Seiten nach der Länge ihres Halbmessers vom Mittelpunkte gleich weit entfernt ist.

§. 20.

Jeder Kreis wird in 360 gleiche Theile, welche man Grade nennt, eingetheilt. Einen Grad theilt man in 60 Minuten, und eine Minute in 60 Sekunden u. s. f. Die Grade bemerkt man mit dem Zeichen (°), welches man zur Rechten über die Zahl schreibt, die Minuten mit (′), und die Sekunden mit (″), z. B. 50°, 14′, 23″ heißt 50 Grade, 14 Minuten, 23 Sekunden. Da die Anzahl von Graden in jedem Kreise einerlei ist, so macht nur

die Grösse derselben in verschiedenen Kreisen einen Unterschied.

§. 21.

Fig. 5. Die Oefnung zwoer geraden Linien (AB und AC) welche sich in einem Punkte (A) durchschneiden, nennet man einen Winkel, die Linien selbst die Schenkel, und den Punkt, wo sie sich durchschneiden, die Spitze oder den Scheitel des Winkels.

§. 22.

Die Grösse eines Winkels hängt nicht von der Länge der Schenkel, sondern von ihrer Lage gegen einander ab. Je grösser die Oefnung ist, welche die Schenkel an der Spitze bilden, desto grösser ist der Winkel. Zween Winkel sind daher einander gleich, wenn diese Oefnungen einander decken können, obschon ihre Schenkel nicht gleiche Länge haben.

§. 23.

Fig. 6. Wenn eine gerade Linie (AB) auf einer andern (CD) so steht, daß sie mit derselben auf beiden Seiten gleiche Winkel macht; so nennet man sie einander senkrechte, oder perpendikulare Linien, und einen jeden solcher

Fig. 7. Winkel einen rechten. Alle andere Winkel heissen schiefe, nämlich stumpfe (p), wenn sie grösser, und spitze (q), wenn sie kleiner als rechte sind.

§. 24.

Fig. 8. Man mißt einen vorgegebenen Winkel (A), um seine Grösse noch genauer bestimmen zu kön-

können, nach dem Bogen (BC), welchen man aus der Spitze des Winkels innerhalb seiner Schenkel beschreibt. Wenn nämlich dieser Bogen, in eine gewisse Anzahl gleicher Theile eingetheilt ist, so wird, wenn man von jedem Theilungspunkte nach der Spitze des Winkels gerade Linien zieht, der Winkel selbst in eben so viele gleiche Theile getheilt. So viel Grade nun dieser Bogen als ein Stück vom ganzen Kreise enthält, so viel werden dem Winkel beigelegt. Man nennt daher diesen Bogen das **Maaß eines Winkels.** Es ist aber hiebei gleich viel, mit welcher Eröfnung des Zirkels dieser Bogen gemacht wird, weil alle Bogen, die man zwischen den Schenkeln eines Winkels beschreibt, gleich grosse Stücke von ihren Peripherien sind, und daher eine gleiche Anzahl Grade haben (§. 20.).

§. 25.

Wenn daher zween Winkel gleich sind, so haben die zwischen ihren Schenkeln beschriebene Bogen gleich viel Grade; und haben diese eine gleiche Anzahl Grade, so sind die Winkel gleich.

§. 26.

Der rechte Winkel hat jederzeit einen Bogen zu seinem Maaße, welcher der vierte Theil vom Kreise ist. Hieraus folgt:

1) daß jeder rechte Winkel 90° hat,

2) daß ein stumpfer Winkel mehr,

3) ein spitzer aber weniger als 90° haben müsse.

§. 27.

Fig. 9. Alle Winkel, welche auf einer Seite einer geraden Linie (AB) an einander grenzen, und ihren Scheitel in einem Punkte c derselben haben, heissen **Nebenwinkel**. Sie müssen nothwendig zween rechten Winkeln gleich seyn, oder 180° enthalten, weil man aus ihrem Scheitel einen halben Kreis beschreiben kann, der sie alle einschließt.

§. 28.

Fig. 7. Wenn solcher Winkel zween (q und p) sind, und man den einen von denselben kennt; so kennet man sogleich auch den andern, weil man nur die Grade des einen von 180 abziehen darf, um die Grösse des andern zu finden.

Alle Winkel um einen Punkt sind 4 rechten Winkeln gleich, oder haben zusammen 360°, weil ihr Maaß ein ganzer Kreis ist.

Anmerk. Wenn mehrere Winkel einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, so muß man jeden derselben mit drei Buchstaben benennen, so daß der Buchstabe, welcher den Scheitel anzeigt, in der Mitte genannt wird. Man kann auch in den Winkel selbst einen kleinen Buchstaben setzen.

§. 29.

Fig. 10. Die Winkel (o und x) welche zwischen zwoen geraden Linien einander gegen über liegen, heissen **Vertikal- oder Scheitelwinkel**, und sind gleich groß.

Be-

Beweis. $r + x = 180°$ und $r + o = 180°$ (§. 27) $r = r$. Hätte nun der Winkel r z. B. 100°, so würden für x 80° und für o 80° übrig bleiben. Daher $o = x$.

§. 30.

Wenn zwo gerade Linien (AB und CD) auf einer Ebene so gegen einander liegen, daß sie sich auf keiner von beiden Seiten (S und T) einander nähern, sondern jederzeit eine gleiche Entfernung von einander behalten, so nennet man sie gleichlaufende oder parallele Linien. Fig. 11.

§. 31.

Aus diesem Begriffe erhellet

1) durch einen Punkt (O) ausser einer geraden Linie (AB) ist nur eine Parallellinie mit ihr möglich,
2) Parallellinien liegen auf der einen Seite gegen einander, wie auf der andern, und können daher einander niemals durchschneiden, wenn man sie auch noch so weit fortziehet.

§. 32.

Wenn in einerlei Ebene zwo gerade Linien AB und CD von einer dritten EF so durchschnitten werden, daß entweder Fig. 12. n. 1.

1) die beiden inwendigen Winkel auf verschiedenen Seiten der dritten Linie x und r, welche man Wechselswinkel nennet, einander gleich sind, oder
2) der auswendige o und der inwendige r auf einer

einer Seite der dritten einander gleich sind, oder

3) die beiden inwendigen auf einer Seite der dritten n und r zusammen 180° ausmachen,

so haben diese Linien AB und CD einerlei Lage gegen einander, oder sind Parallellinien.

Beweis 1) Wenn man alle diese Linien halb herumdrehete, ohne ihre Lage gegen einander zu verändern; so würde F in E, FD in
n. 2. die Stelle von AE, und EB in die Stelle von CF, und in die Stellen der vorigen Winkel lauter ihnen gleiche kommen. Denn da EF sich selbst gleich ist, so muß F nothwendig auf E fallen (§. 15. n. 1.) FD kann weder weiter herauf wie XF, noch auch weiter herunter, wie ZF, zu liegen kommen, weil sonst der Winkel x grösser oder kleiner als r seyn müßte. Es ist daher auch unmöglich, daß die Linien AE und CF sich auf einer Seite einander nähern könnten, weil sie sich in die Stellen von FD und EB legen lassen, und sich daher auch auf dieser Seite einander nähern müßten, welches dem Begriffe von geraden Linien widerspricht (§. 15. n. 5.). Die Gleichheit der Wechselswinkel ist folglich ein sicheres Kennzeichen von der parallelen Lage der geraden Linien.

2) Da x und o als Vertikalwinkel einander gleich sind (§. 29.), so muß auch o=r seyn, weil

weil zwei Dinge, die einem dritten gleich sind, auch unter einander selbst gleich seyn müssen. Daher schließt man ebenfalls wie n. 1.

3) Da n und x = 180°, und man anstatt des Winkels x den Winkel r nehmen kann; so muß auch n + r = 180° seyn. Nimmt man nun wieder von beiden den Winkel n weg, so muß gleiches übrig bleiben, nämlich x=r, und es gilt wiederum der Schluß n. 1.

§. 33.

Wenn daher zwo Parallellinien (AB und CD) von einer dritten Linie (EF) durchschnitten werden, so sind Fig. 13.

1) die inwendigen Winkel (x und r, die Wechselswinkel) auf verschiedenen Seiten der dritten einander gleich.

2) Der auswendige o und der inwendige r auf einer Seite der dritten sind gleich.

3) Die beiden inwendigen auf einer Seite der dritten (n und r) machen zusammen 180° aus.

Beweis 1) Wäre nicht x = r, so müßte der eine grösser oder kleiner seyn als der andere. Wäre z. B. x > r, so müßte eine andere Linie (ST) einen Winkel = r machen. Diese müßte aber durch den Punkt E mit CD parallel seyn, (§. 32. n. 1) welches nach §. 31. n. 1. unmöglich. Wäre x < r, so würde die Linie (XZ) einen Winkel = r machen.

 Allein

Allein auch diese könnte nicht durch E mit CD parallel seyn. Folglich ist x weder grösser noch kleiner als r, sondern ihm gleich.

2) Weil r = x, und x = o (§. 29.) so ist auch r = o.

3) Weil n + x = 180°, und r = x, so muß auch n + r 180° enthalten.

§. 34.

Fig. 3. Werden dagegen zwo gerade Linien (XZ und CD), welche nicht einerlei Lage gegen einander haben, in einerlei Ebene von einer dritten (PQ) durchschnitten; so sind die inwendigen Winkel auf verschiedenen Seiten (XEQ und DFP), so wie auch der auswendige PEZ und der inwendige Winkel DFP auf der einen Seite der dritten ungleich, und die inwendigen auf einer Seite der dritten betragen mehr oder weniger als 180°.

Beweis: Wäre XEQ = DFP oder PEZ = DFP, so wären XZ und CD Parallellinien (§. 32. n. 1.) daher müssen die Winkel ungleich seyn. Aus eben dem Grunde können n und r zusammen nicht 180° enthalten. Sie betragen weniger, und deshalb nähern sich die Linien XZ und CD auf dieser Seite. Die Winkel x und m betragen mehr als 180°; weswegen sich die Linien auf dieser Seite von einander entfernen, und folglich keine parallele Lage gegen einander haben.

II. Vom

II. Vom Längenmaaße und Messung der Linien auf dem Felde, denen man beikommen kann.

§. 35.

Man bedient sich zur Messung der Linien auf dem Felde des landüblichen Längenmaaßes; hier zu Lande der Rheinländischen Ruthe. Aber anstatt der Eintheilung dieses Maaßes in 12 gleiche Theile, theilet man in der Geometrie die Ruthe in 10 gleiche Theile, welche Schuhe oder Fuß heissen, den Fuß in 10 Zolle, den Zoll in 10 Linien u. s. f. Die Ruthen werden wie Grade, die Fuß wie die Minuten u. s. f. angedeutet, z. B. 9°, 4′ heißt 9 Ruthen, 4 Fuß.

Nach dem geometrischen oder zehntheiligen Maaße kann man leicht eine Zahl von verschiedenen Benennungen nach der geringsten unter ihnen lesen, wenn keine dazwischen fehlt, oder die fehlende durch eine Null ersetzt worden, z. B. 54381‴ heißt 54°, 3′, 8″, 1‴, und 6103‴ sind 6°, 1′, 3‴.

§. 36.

Nöthigenfalls muß man das eine Maaß in ein anderes verwandlen können, welches durch die Regel de Tri geschiehet. Z. B. Man soll 5436‴ zehntheiligen Maaßes in zwölftheiliges verwandlen, so bedürfen die Ruthen keiner Verwandlung.

Man hat noch die Sätze:

```
10′  —  12′  —  436‴
 1 0              12
 ----           ----
100″              872
 1 0             436
 ----           ------
1000‴          |~~5~~232|5′
               |     12|
               -------
                 464
                232
               -------
               |~~2~~784|2″
               |     12|
               -------
                1568
                784
               -------
               |~~9~~408|9‴
```

Man erhält also insgesammt 5°, 5′, 2″, 9‴ zwölftheiligen Maaßes. Eben so kann das zwölftheilige Maaß in zehntheiliges verwandlet werden, z. B. 9°, 11′, 4″. Man schließt

```
12′  —  10′  —  11′, 4″.
 12              12
 ---             ---
 24              26
 12              11
 ----           ----
144″            136
                 10
               ------
               |1360|9′
               |1296|
               ------
                 64
                 10
               ------
               |640|4″
               |576|
               ------
                 64
```

Hierdurch erhält man zusammen 994″ im geometrischen Maaße.

§. 37.

§. 37.

Wenn man gerade Linien auf dem Felde, denen man beikommen kann, messen will, und es nöthig ist, daß dieselben auch in einiger Ferne kennbar sind; so pflegt man dieselben vorher abzustecken. Zu dieser Absicht bedient man sich langer gerader Stangen, die man in den Anfang und das Ende der Linie senkrecht einsteckt. Ist die Linie sehr lang, so kann man zwischen die vorigen Stangen noch mehrere einstecken, nur so, daß sie sich alle einander decken.

§. 38.

Zur Messung einer geraden Linie bedient man sich der **Meßketten, Meßstangen,** oder **Meßschnüre.** Von zwoen Personen wird diese Arbeit mit der Meßkette auf folgende Art verrichtet. Jeder von beiden führt einen Stab bei sich, der in die an den Enden der Kette befindlichen Ringe paßt; der eine aber oder der erste auch einige kleinere Zeichenstäbe. Der andere steckt seinen Stab durch den Ring der Kette in den Anfang der Linie, und zieht indessen den Stab daselbst aus. Der erste geht mit dem andern Ringe der Kette fort, so weit es deren Länge zuläßt, zieht sie gehörig an, und steckt seinen Stab durch den Ring in die Erde, wobei darauf Acht gegeben werden muß, daß man nicht von der geraden Linie abweicht. Wenn dies geschehen, zieht jeder seinen Stab aus, der erste steckt an die Stelle des seinigen

einen

einen Zeichenstab, und beide gehen weiter. Sobald der andere an den Zeichenstab gekommen ist, nimmt er ihn nach sich, und sticht an dessen Stelle seinen Stab durch den Ring der Kette. So wird bis zu Ende der ganzen Linie auf eben die Art fortgefahren, und man sieht zuletzt aus der Zahl der gesammleten Zeichenstäbe, wie vielmal die Länge der Kette in der Länge der gemessenen Linie enthalten sey, zu welcher Zahl von Ruthen noch diejenige Ruthen oder Fuß zugerechnet werden müssen, welche vom letzten Zeichenstabe bis zum Ende der Linie vorhanden sind.

§. 39.

Soll eine Linie, welche über einen Berg gehet, horizontal gemessen werden, so kann nur ein solches Stück der Meßkette gebraucht werden, welches genugsam ausgespannt, und über der Erde genau wagerecht gehalten werden kann. In diesem Falle müssen auch die Stäbe genau senkrecht stehen. Man zählt die gefundenen Weiten der Stäbe von einander zusammen, so ist ihre Summe die Länge der zu messenden Linie.

§. 40.

Wenn man gerade Linien auf dem Papier messen, oder im Grossen gemessene Linien auf das Papier tragen soll; so bedient man sich hiezu der verjüngten **Maaßstäbe**, welche nach dem geometrischen oder zehntheiligen Maaße auf folgende Art eingerichtet sind.

Man

Man hat auf einer geraden Linie (AZ) zehn gleiche Theile aus (A) bis (B) aufgetragen, und mit derselben eine andere gerade Linie (AC) unter einem rechten Winkel verbunden, welche ebenfals in zehn gleiche Theile eingetheilt ist. Durch jeden Theilungspunkt der Linie (AC) sind mit (AB) Parallellinien gezogen, und auf der letztern derselben eben die 10 Theile aufgetragen worden; welche sich auf AB befinden. Dann sind die schrägen Linien von oben 10 bis unten 9 u. s. f. gezogen worden. Die Linie AB zeigt eine Ruthe an, jeder Theil derselben von 0 bis 1, 1 bis 2 u. s. f. einen Fuß, und die Linien zwischen der senkrechten BE und der schrägen Linie B, die Zolle. Fig. 14.

Will man nun eine Linie auf diesem Maaßstabe nehmen, die z. B. 254″ lang seyn soll, so setzt man den Zirkel in der senkrechten Linie 20 auf die vierte Parallellinie, und thut ihn auf derselben bis zu der schrägen Linie auf, welche von oben 6 bis unten 5 gezogen worden.

III. Von den Seiten und Winkeln der geradelinichten Figuren.

§. 41.

Wenn eine Ebene um und um in eine oder mehrere Linien eingeschlossen ist, so nennt man dieselbe eine Figur, und zwar, wenn alle diese Linien gerade sind, eine geradelinichte Figur, wenn sie alle krumme Linien sind, eine krummlinichte, und wenn es gerade und krumme

me sind, eine vermischtlinichte Figur. Die Linien heissen die Seiten; Die Winkel aber, welche sie mit einander machen, die Ecken der Figur, nach deren Zahl sie ein Drei- Vier- Fünfeck u. s. f. überhaupt aber auch ein Vieleck oder Polygon genannt wird.

§. 42.

Wird eine Ebene durch drei gerade Linien eingeschlossen, so entsteht ein Dreieck (Triangel). Doch schliessen nicht immer zwo gerade Linien, die von einer dritten durchschnitten werden, einen Raum ein, wenn nämlich

Fig. 15. 1) jede der beiden Linien (EC und FD) mit der dritten (AB) einen rechten Winkel machen, oder
2) die eine (EC) einen rechten, und die andere (HD) einen stumpfen Winkel, oder
3) alle beide (GC und HD) mit der dritten stumpfe Winkel machen.

§. 43.

Ein Dreieck heißt gleichseitig, wenn alle drei Seiten, gleichschenklich, wenn zwo derselben einander gleich sind. Ist keine Seite der andern gleich, so nennet man es ein ungleichseitiges Dreieck. Ist in dem Dreieck ein stumpfer Winkel, so heißt es ein stumpfwinklichtes, ist in demselben ein rechter Winkel, ein rechtwinklichtes, sind alle Winkel spitze, ein spitzwinklichtes Dreieck. In
Fig. 16. einem rechtwinklichten Dreieck (ABC) wird die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite (BC) die Hypothenuse, die andern, welche

ihn

ihn zusammen machen, werden die Katheten genannt.

§. 44.

In jedem Dreieck machen alle Winkel zusammen 180° aus. Fig. 17.

Beweis. Wenn man durch die Spitze C eines Winkels eine gerade Linie DE mit der gegenüberstehenden Seite AB parallel ziehet, so ist m=A, und x=B (§. 33. n. 1.). Nun ist m+r+x=180° (§. 27.), und da man anstatt des Winkels m den Winkel A, und anstatt x den Winkel B nehmen kann, so ist auch A+r+B=180°.

§. 45.

Hieraus folgt:

1) daß wenn unter den Winkeln eines Dreiecks ein rechter oder stumpfer ist, die beiden andern spitzig seyn, und im ersten Falle zusammen auch einen rechten oder 90° ausmachen müssen,

2) daß wenn eine gerade Linie (AC) durch einen gewissen Punkt (C) auf eine andere (AB) senkrecht geht, keine andere gerade Linie aus dem nämlichen Punkte auf eben dieselbe senkrecht könne gezogen werden. Fig. 16.

3) Wenn zween Winkel eines Dreiecks zween Winkeln des andern gleich sind, so ist auch der dritte dem dritten gleich.

4) Wenn man eine Seite (AC) eines Dreiecks verlängert, so ist der äussere Winkel (r) so groß, als die beiden ihm gegenüber lie- Fig. 18.

liegenden Winkel (A und B) zusammengenommen. Denn $r + n = A + B + n = 180°$. Nimmt man nun den Winkel n weg, so bleibt für r so viel übrig, als für $A + B$ zusammengenommen.

§. 46.

Fig. 19. Wenn in zweien Dreiecken (ABC und abc) entweder

1) zween Winkel nebst der Seite dazwischen, oder
2) zwo Seiten nebst dem Winkel dazwischen, oder
3) die drei Seiten

stückweise genommen gleich groß sind; so können die Dreiecke einander decken, und sind auch ihre übrigen gleichgelegenen Seiten und Winkel gleich.

Beweis 1) Es sey $A = a$, $B = b$, $AB = ab$. Legt man nun a auf A, und b auf B, so werden ac auf AC und bc auf BC, und folglich c auf C fallen, in welchem Punkte sich in beiden Dreiecken die Linien ac und bc durchschneiden, weil sie in denselben eine gleiche Lage gegen einander haben. Die Dreiecke decken einander.

2) Es sey $AB = ab$, $AC = ac$ und $A = a$. Wenn man nun ab auf AB legt, so liegt ac auf AC und c auf C. Folglich muß auch cb auf CB fallen (§. 15. n. 1.), und die Dreiecke decken einander.

3) Es sey $AB = ab$, $AC = ac$, und $CB = cb$. Wenn man nun aus A mit der Eröfnung

von

von AC und aus B mit BC die Bogen PQ und RS beschreibt, so wird, wenn man a auf A, b auf B legt, ac bis in den Bogen PQ und bc bis in RS reichen, und sich in C so wie die Bogen durchschneiden. Folglich wird ca auf CA und cb auf CB fallen, und die Dreiecke werden sich decken.

§. 47.

Wenn man in einem gleichschenklichten Dreieck (ABC) aus der Spitze (C) der gleichen Seiten (AC, CB) auf die dritte Seite (AB) eine senkrechte Linie CD ziehet; so theilet dieselbe das Dreieck in zwei gleiche Dreiecke, deren gleichgelegene Seiten und Winkel gleich sind. Fig. 20.

Beweis. AC = CB, CD = CD und wenn D die Mitte von AB ist, so ist AD = DB, und die Dreiecke ACD und CDB können einander decken (§. 46. n. 3.). Diese Mitte kann aber nicht anderswo in E seyn, weil sonst die Dreiecke ACE und CEB decken, die Winkel bei E gleich seyn, und CE auf AB senkrecht stehen müßten: welches unmöglich ist, weil CD durch C auf AB senkrecht ist §. 45. n. 2. Daher sind die Dreiecke CDA und CDB gleich und r = x, A = B, o = n.

§. 48.

Daher sind

1) in jedem gleichschenklichten Dreiecke die Winkel an der dritten Seite einander gleich; und wenn ein Dreieck zween gleiche Winkel

hat, so ist es ein gleichschenklichtes, weil kein anderes Dreieck zween gleiche Winkel hat.

2) Ein gleichseitiges Dreieck hat drei gleiche Winkel, deren jeder 60° enthält; und wenn ein Dreieck drei gleiche Winkel hat, so ist es ein gleichseitiges.

§. 49.

In jedem Dreiecke liegt

Fig. 21. 1) der grösseren Seite (A C) ein grösserer Winkel (A) und

2) dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber.

Beweis α) Wenn man von A C ein Stück abschneidet, welches so groß als C B ist, und die Linie D B ziehet: so ist o = n (§. 47). In dem Dreiecke A D B ist o = A + r (§. 45. n. 4.) folglich auch n = A + r. Da nun n > A, wie viel mehr n + r > A.

β) Wenn A B C grösser ist als A, so kann die Seite A C weder eben so groß als C B seyn (§. 47), noch auch kleiner, weil im letzten Falle der Winkel A > B seyn müßte. Sie ist daher grösser als C B.

§. 50.

Fig. 22. Ein Viereck (A B C D) dessen gegenüberstehende Seiten parallel sind, heißt ein Parallelogram. Hat dasselbe lauter rechte Winkel, so nennet man es ein Rechteck. Sind die Seiten eines Rechtecks einander gleich, so heißt es ein Quadrat. Ein schiefwinklichtes Parallelogram wird, wenn seine Seiten gleich

sind,

sind, eine Raute, wenn sie aber ungleich sind, eine länglichte Raute genannt. Hat ein Viereck lauter ungleiche Seiten und Winkel, so nennet man es ein Trapezium.

§. 51.

Eine gerade Linie (DB) welche zwo nicht an einander grenzende Ecken der Figur verbindet, wird eine Diagonallinie genannt. Fig. 22.

§. 52.

In jedem Parallelogram sind die einander gegenüberliegende Seiten und Winkel gleich.

Beweis. Wenn man die Diagonallinie DB zieht, so ist wegen AB und DC, $o = r$ wegen AD und BC aber $m = x$ (§. 33. n. 1.) Da auch $DB = DB$, so können die Dreiecke DBA und DBC einander decken (§. 46. n. 1.) und ist in denselben $AB = DC$, $AD = BC$, und $A = C$, $r + x = o + m$ das ist $D = B$. Fig. 22.

§. 53.

Wenn daher zwo an einander grenzende Seiten AB, BC eines Parallelograms gleich sind, so sind sie alle gleich; und wenn ein Winkel ein rechter ist, so sind sie es alle. (§. 33. n. 3.) Fig. 23.

§. 54.

Alle Winkel einer jeden geradelinichten Figur machen zusammengenommen so vielmal 180° aus, als die um 2 verminderte Zahl ihrer Seiten anzeigt. Fig. 24.

Beweis. Wenn man die Figur durch Diagonallinien in Dreiecke theilt, so müssen deren zwei weniger entstehen, als die Figur Seiten

 hat,

hat, weil das erste ABC, und das letzte ADE jedes zwo Seiten der Figur erfordert. Nun haben die Winkel eines Dreiecks 180°, folglich schließt man, wie der Satz sagt.

Aufgaben.

§. 55.

Fig. 25. Einen Punkt zu finden, der von zween gegebenen (A und B) gleich weit abstehe, und ausser der zwischen ihnen möglichen geraden Linie liege.

Aufl. Man beschreibe aus A und B mit gleicher Eröfnung, die aber grösser als die Hälfte von AB seyn muß, über oder unter AB Kreisbogen, so ist der Punkt P, wo sich dieselben durchschneiden der gesuchte.

§. 56.

Fig. 26. Auf einer geraden Linie (AB) ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben.

Aufl. Man beschreibt mit der Eröfnung von AB über derselben Kreisbogen, und zieht von dem Punkte C, wo sie sich durchschneiden, nach A und B gerade Linien.

§. 57.

Fig. 27. Aus zween gegebenen Linien (AB und DE), von welchen AB die gleichen Schenkel, und DE die dritte Seite abgeben soll, ein gleichschenklichtes Dreieck zu machen.

Aufl. Man macht mit der Eröfnung von AB aus A einen Kreisbogen über derselben, und durchschneidet ihn aus B mit der Eröfnung

von

von DE. Von dem gefundenen Punkte C ziehet man nach A und B gerade Linien.

§. 58.

Aus drei gegebenen Linien (LM, NO, PQ), von denen zwo zusammen genommen grösser sind als die dritte, ein Dreieck auf der Linie (AS) zu machen, so daß LM von A gegen S zu, NO in A, und PQ auf dem andern Ende von LM angebracht werde. Fig. 28.

Aufl. Man mache AB = LM, beschreibe aus A mit der Eröfnung von NO, aus B aber mit PQ Kreisbogen, und verbinde den Punkt C, wo sie sich durchschneiden, durch gerade Linien mit A und B, so ist ABC das verlangte Dreieck.

§. 59.

Aus einem Punkte (B) einer geraden Linie BC einen Winkel über derselben zu beschreiben, der einem gegebenen Winkel A gleich sey. Fig. 29.

Aufl. Man beschreibe zwischen den Schenkeln des Winkels A einen Kreisbogen FG, desgleichen aus B mit der Eröfnung von AG über der Linie BC einen Kreisbogen HL, und durchschneide denselben aus L mit der Eröfnung von FG; dann verbinde man den Durchschnittspunkt M durch eine gerade Linie mit B, so ist B = A.

Beweis. Wenn man die geraden Linien FG, und ML zieht, so sind die Seiten der Dreiecke AFG und BML, und also auch ihre gleichgelegenen Winkel einander gleich (§. 46. n. 3.).

§. 60.

Einen Winkel auf dem Papier zu messen.

Aufl. Man legt den Mittelpunkt des Transporteurs auf die Spitze des Winkels, und die innere Schärfe des Lineals auf den einen Schenkel desselben. Dann zählt man die Grade zwischen beiden Schenkeln.

§. 61.

Aus dem Punkte (A) einer geraden Linie AB einen Winkel über derselben zu machen, der eine gewisse Anzahl von Graden habe.

Aufl. Man legt den Mittelpunkt des Transporteurs auf A, und seinen Halbmesser auf AB. Dann zählet man von der Linie AB an die Grade ab, die der Winkel haben soll, und bemerkt den Punkt, wo dieselben aufhören. Aus diesem Punkte zieht man nach A den andern Schenkel des verlangten Winkels.

§. 62.

Aus zwoen gegebenen geraden Linien (AB und DE) und dem Winkel dazwischen R ein Dreieck zu machen.

Fig. 30. Aufl. Man trägt den Winkel R nach §. 59. auf der Linie AB in A, und macht den andern Schenkel desselben so groß als DE. Dann verbindet man die beiden Enden C und B der Schenkel durch eine gerade Linie CB, so ist das Dreieck ABC das verlangte.

§. 63.

Aus zween gegebenen Winkeln und einer geraden Linie AB ein Dreieck zu machen.

Aufl.

Aufl. Man trägt den einen Winkel auf das eine Ende der gegebenen Linie, und den andern auf das andere Ende, verlängert alsdann die Schenkel der Winkel, bis sie sich durchschneiden.

Anmerk. Es müssen hiezu solche Winkel gegeben werden, aus welchen ein Dreieck bestehen kann. Es dürfen daher nicht 2 rechte oder 2 stumpfe seyn (§. 42.).

§. 64.

Auf der Mitte einer geraden Linie AB eine andere senkrecht aufzurichten, und hiemit die erstere in zween gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Man suche zween Punkte R und Q, die von A und B gleich weit abstehen, und verbinde sie durch eine gerade Linie RQ, so ist beides geleistet. Fig. 31.

Beweis. Wenn man A, B, R, Q verbindet, so haben die Dreiecke RQA und RQB gleiche Seiten, daher p = r. In den Dreiecken RCA und RCB ist AR = RB, RC = RC, p = r daher (§. 46. n. 2.) AC = CB, n = x und RQ mitten auf AB senkrecht.

§. 65.

Durch einen gegebenen Punkt R, welcher entweder 1, in oder 2, ausser einer geraden Linie DE liegt, eine andere senkrecht auf dieselbe zu ziehen. Fig. 32.

Aufl. Man suche auf der Linie DE zween Punkte A und B, die von R gleich weit abstehen, so daß RA = RB. Dann suche man einen andern Punkt Q, der von A und B gleich

weit entfernt ist, und verbinde RQ, welche die verlangte Linie ist.

Beweis. Wenn man im ersten Falle Q mit A und B verbindet, so haben die Dreiecke QRA und QRB gleiche Seiten. Daher n=x. Im zweiten Falle urtheilt man wie §. 64.

§. 66.

Auf dem Ende B einer geraden Linie AB eine andere senkrecht aufzurichten.

Fig. 33. Aufl. Man nehme C nach Belieben in AB, suche einen Punkt P, der von C und B gleich weit absteht. Durch C und P ziehe man eine gerade Linie, und verlängere sie bis Q, so daß PQ=CP. Endlich verbinde man QB, welche die gesuchte Linie ist.

Beweis. Wenn man PB zieht, so ist in dem gleichschenklichten Dreiecke PBC der Winkel C=x (§. 48. n. 1.) und n=C+x (§. 45. n. 4.) oder n noch einmal so groß als x. Eben so ist im Dreieck PBQ der Winkel Q=v und r=Q+v=2v. Daher ist n+r zweimal so groß als x+v. Da nun n+r=180° so ist x+v=90° oder bei B ein rechter Winkel. Und ist dies, so steht QB auf AB senkrecht (§. 23.).

Anmerk. Mechanisch werden senkrechte Linien mit Hülfe des Winkelmaaßes oder des in den Reißzeugen befindlichen rechtwinklichten Dreiecks gezogen.

§. 67.

Einen Winkel (PAQ) in zween gleiche Theile zu theilen.

Aufl.

Aufl. Man schneide von beiden Schenkeln beliebige aber gleich grosse Stücke ab, so daß AB = AC, suche einen Punkt D, der von B und C gleich weit absteht, und verbinde A und D, so ist DAP = DAQ = ½ PAQ. (§.46.n.3.) Fig. 34.

§. 68.

Durch einen über einer geraden Linie (AB) gegebenen Punkt (C) eine andere mit ihr parallel zu ziehen.

Aufl. Man nehme in AB die Punkte D und E nach Belieben an. Aus C beschreibe man mit der Eröfnung DE, und aus E mit CD Kreisbogen, und verbinde den Punkt P, wo sie sich durchschneiden, mit C, so ist CP die gesuchte Linie. Denn DEPC ist ein Parallelogram, und folglich CP mit DE parallel. Fig. 35.

Anmerk. Mechanisch zieht man Parallellinien mit einem Parallellineal, oder auch mit einem gewöhnlichen Lineal, an welches man den Zirkel ansetzt, ihn bis zu dem gegebenen Punkt aufthut, und so durch denselben die verlangte Linie ziehet.

§. 69.

Aus zwoen angrenzenden Seiten AB und DE, und dem Winkel dazwischen F, über der einen von ihnen AB ein Parallelogram zu beschreiben.

Aufl. Man mache in A einen Winkel = F, und seinen Schenkel AC=DE. Dann beschreibe man aus B mit der Eröfnung von AC und aus C mit AB Kreisbogen, und verbinde den Punkt G, wo sie sich durchschneiden mit B und C, so ist ABCG das Parallelogram. Fig. 36.

§. 70.

Zur Beschreibung eines Rechtecks müssen zwo grenzende Seiten, zur Beschreibung eines Quadrats aber nur eine Seite, und zur Raute eine Seite und ein schiefer Winkel gegeben werden.

§. 71.

Fig. 37. Zur Beschreibung vielseitiger Figuren ist es nöthig, daß man sie entweder durch würklich gezogene oder eingebildete Diagonallinien in Dreiecke theilt, und diese nach einander in ihrer Ordnung beschreibt.

IV. Von Messung der Winkel nebst Absteckung derselben, und der Linien auf dem Felde unter einer gewissen Lage.

§. 72.

So wie man sich auf dem Papier zur Messung eines Winkels des Transporteurs bedienet, eben so gebraucht man zur Messung der Winkel auf dem Felde ein ähnliches Werkzeug, welches man ein Astrolabium (Winkelmesser) nennet. Man stellt dasselbe so, daß der Mittelpunkt desselben gerade über dem Scheitel des Winkels stehet, welches man durch ein Senkblei erhält. Die Fläche desselben richtet man mit der Setzwage horizontal. Dann zielt man durch das unbewegliche Lineal nach einem Punkte, z. B. einer Stange, in dem einen Schenkel des Winkels, und schraubt darauf

das

das Instrument fest. Durch das bewegliche Lineal zielt man nach einem Punkte in dem andern Schenkel des Winkels, und zählt alsdenn die Grade zwischen beiden Linealen. Eben so viele hat der Winkel. Ist dies geschehen, so kann man den Winkel leicht mit Hülfe des Transporteurs auf das Papier tragen.

§. 73.

Am kürzesten kann man einen **Winkel** mit dem **Meßtische** (der Mensel) aufnehmen. Man nimmt einen Punkt auf demselben, welcher gerade über dem Scheitel des Winkels liegt. Dies läßt sich mit Hülfe einer Zange von Holz leicht erhalten. Dann zielt man durch die an den Enden des Lineals befindlichen Diopter nach jedem Schenkel des Winkels, und ziehet jedesmal an der Schärfe des Lineales eine Linie. So ist der Winkel aufgenommen, und kann mit dem Transporteur leicht gemessen werden, um seine Grösse in Graden zu bestimmen.

§. 74.

Man kann auch einen **Winkel** blos mit **Meßkette und Stangen aufnehmen, und mit Hülfe des verjüngten Maaßstabes auf das Papier bringen.** Gesetzt man solte den Winkel A aufnehmen, so mißt man entweder die ganzen Schenkel AB und AC, und ihre Oefnung an den Enden BC, oder sticht in denselben beliebige Stücke AD und AE ab, und mißt diese nebst ihrer Oefnung DE. So viel Fig. 38.

viel Theile des grossen Maaßes jede dieser Linien hat, so viel Theile, z. B. Ruthen oder Fuß, des verjüngten Maaßstabes nimmt man an ihrer Stelle, und beschreibt mit diesen Seiten in gehöriger Lage das Dreieck a e d, (ohne e d auszuziehen); so ist a = A, weil dadurch, daß man anstatt der Theile eines grössern Maaßes eben so viel Theile eines kleinern Maaßes genommen hat, nichts in der Lage der Schenkel gegen einander geändert wird. (§. 22.)

Fig. 39. Findet man es zu unbequem, den Winkel DAC zu messen, so darf man nur einen seiner Schenkel CA nach Belieben bis E zurückziehen, und diesen Nebenwinkel aufnehmen. Daraus läßt sich die Grösse des Winkels DAC ebenfalls abnehmen. (§. 28.)

§. 75.

Die Absteckung eines in Graden gegebenen Winkels geschieht am leichtesten mit dem Astrolabium. Man stellt dasselbe über den gegebenen Scheitel, und zielt durch das unbewegliche Lineal nach einem Punkte in dem gegebenen Schenkel. Darauf schiebt man das bewegliche Lineal auf den gehörigen Grad, und läßt in der Linie, welche man übersieht, irgendwo einen Stab einstecken.

Ist der Winkel auf dem Meßtische gegeben, so kann man denselben auf eine ähnliche Art leicht auf dem Felde abstecken.

Hätte man nur eine Mensel, und den Winkel in Graden gegeben, so müßte man densel-

ben

ben vorher mit dem Transporteur auf den Meßtisch auftragen, und sodann am verlangten Orte abstecken.

§. 76.

Soll man einen auf dem Felde vorkommenden Winkel A an einem andern Orte aus L über LM blos mit Meßkette und Stäben abstecken, so stecke man AE nach Belieben ab, und mache LO ihr gleich. AD nehme man so, daß sie gerade eine gewisse Anzahl Ruthen oder halbe Ruthen betrage, damit man durch den Ring daselbst einen Stab stecken könne, und von da an messe man DE. Den Ort der Kette, wo E hintrift, halte man mit der Hand an O, hänge den Ring am Ende derselben in L, und lasse die Kette so ausspannen, daß man von L an eben so viel Ruthen hat, als AD hatte. Ist dann von O an die Kette ganz ausgespannt, so ist N der Ort, wo noch ein Stab einzustecken ist, und L = A. Fig. 40.

§. 77.

Eine senkrechte Linie kann man mit dem Astrolabium und Meßtische aus einem gegebenen Punkte C einer geraden Linie AB leicht abstecken, weil man nur aus C über CA einen rechten Winkel abstecken darf.

§. 78.

Mit Stäben und Meßkette kann man eben dieses leisten. Man stecke in der Linie AB in beliebigen gleichen Weiten von c z. B. in E Fig. 41.

und

und F Stäbe ein. Auf diese hänge man die äussersten Ringe der Kette; ihre Mitte nehme man mit der Hand, und spanne sie gleichförmig aus, oder nehme auf beiden Seiten gleich grosse Stücke der Kette, und fasse sie daselbst zusammen, so wird der Ort der Hand den Ort D auf der Erde anzeigen, wo noch ein Stab zur Absteckung der verlangten Linie CD einzustecken ist. (§. 46. n. 3.)

Eben dieses könnte auch mit einer unabgetheilten Schnur ausgerichtet werden.

§. 79.

Fig. 42. Liegt aber der Punkt C, durch den die senkrechte Linie auf AB abgesteckt werden soll, ausser derselben; so hängt man einen der äussersten Ringe der Kette um den Stab in C, und geht mit ausgespanntem Theile der Kette hinter AB zurück. Hier sticht man einen Stab durch einen beliebigen Ring, hält ihn gerade herunter, geht um C herum, und läßt durch einen andern die Oerter D und E bemerken, wo man mit dem ausgespannten Theile der Kette in AB gewesen ist. Hier sticht man Stäbe ein, und theilt die Linie DE in zween gleiche Theile, welches durch Messen oder durch Zusammenschlagung einer von D bis E reichenden Schnur erhalten werden kann. Endlich sticht man in F den zur senkrechten Linie CF erforderlichen Stab ein (§. 46. n. 3. §. 65. n. 2.)

§. 80.

§. 80.

Soll man mit einer geraden Linie AB eine andere in einer bestimmten Weite parallel abstecken: so richtet man aus zween beliebigen Punkten derselben C und D zwo senkrechte Linien auf, (§. 77. oder 78.) macht sie der verlangten Weite gleich, und steckt in ihre Enden EF Stäbe ein, welche die Parallellinie bezeichnen. Fig. 43.

§. 81.

Wenn aber diese Linie durch einen gewissen Punkt G mit AB parallel laufen soll, so steckt man in einem beliebigen Punkt H von AB einen Stab, und macht aus dem Scheitel G auf dem Schenkel GH einen Winkel HGI, der so groß ist, als AHG (§. 75. oder 76), so ist GI mit AB parallel (§. 33. n. 1). Fig. 44.

V. Von den geraden Linien und Winkeln am Kreise.

§. 82.

Jede gerade Linie (AB), welche zween Punkte der Peripherie verbindet, heißt eine Sehne, und die Bogen ABC und ABF, worin sie den Kreis theilt, werden ihre Bogen genannt. Geht eine Sehne AD durch den Mittelpunkt L, so nennet man sie einen Durchmesser des Kreises. Fig. 45.

§. 83.

Die Figur (ABC), welche eine Sehne mit ihrem Bogen einschließt, nennet man einen

Abschnitt; die aber zwischen zween Halbmessern und einem Bogen liegt FOD einen Ausschnitt.

§. 84.

Fig. 45. Ein Winkel FOD, dessen Scheitel in dem Mittelpunkte liegt, wird ein Winkel am Mittelpunkt; dessen Scheitel aber in der Peripherie liegt DAB, ein Winkel an der Peripherie (am Umfange) genannt. Man sagt von diesem Winkel, er bespanne den Bogen DB.

§. 85.

Fig. 45. Jeder Durchmesser theilt den Kreis in zween gleiche Theile, welche man Halbkreise nennt, und jede gerade Linie (AD), welche den Kreis in zween gleiche Theile theilet, begreift jederzeit den Mittelpunkt desselben in sich.

Beweis. Wenn man den Kreis um seinen Mittelpunkt halb herumdrehet, so wird der eine Halbkreis ganz in die Stelle des andern kommen. Der Mittelpunkt kann nicht ausser AD in E liegen, weil sonst AB ein Durchmesser, und ABC = ABF seyn müßte.

§. 86.

Fig. 46. Wenn zween Ausschnitte ACB und DCE gleiche Winkel m und r haben, so sind auch ihre Bogen AB und DE gleich. Und umgekehrt kann man von der Gleichheit der Bogen auf die Gleichheit der Winkel schliessen.

Beweis. Da die Winkel m und r sich decken, und auch die Schenkel derselben gleich

sind,

sind, §. 16. n. 1. so müssen die Enden der Bogen AB, und DE zusammen fallen, und die Bogen selbst sich decken. Und wenn dies geschieht, so sind die Winkel gleich.

§. 87.

Gleiche Bogen (AB und DE) eines Kreises haben auch gleiche Sehnen: und gleiche Sehnen haben gleiche Bogen. Fig. 46.

Beweis. Wenn man die Halbmesser CA, CB, CE, CD ziehet, so ist in den Dreiecken ACB und DCE AC = BC = DC = EC, m = r. Folglich die Sehne AB = DE (§. 46. n. 2.) und weil m = r, so sind auch die Bogen gleich (§. 86.).

§. 88.

Ein Winkel am Mittelpunkte (ACB) ist jederzeit zweimal so groß, als ein Winkel an der Peripherie (ADB), welcher mit ihm einen Bogen AB bespannet. Fig. 47.

Beweis. Der Mittelpunkt C liegt entweder in einem Schenkel DB des Winkels an der Peripherie, oder in dem Winkel selbst, oder ausser demselben.

1) Im Dreieck ACD ist D = A (§. 48. n. 1.) und q = A + D (§. 45. n. 4.) das ist q = 2 D. n. 1.

2) Man ziehe aus D den Durchmesser DE, so ist q = 2 x und p = 2 r nach n. 1. Daher q + p = 2 x + 2 r oder ACB = 2 ADB. n. 2.

3) Man ziehe wiederum den Durchmesser DE, so ist q + p = 2 x + 2 r nach n. 1. n. 3.

Da nun $q = 2x$ so ist auch $p = 2r$ oder $ACB = 2ADB$.

§. 89.

Fig. 48. Daher hat ein Winkel am Umfange nur die Hälfte des Bogens, den er bespannet zu seinem Maaß; woraus ferner folgt:

n. 1. 1) daß alle Winkel am Umfange A, B, C, welche einen Bogen DE, oder gleiche Bogen bespannen, oder welche in einem Abschnitte DBE, oder gleichen Abschnitten liegen, einander gleich sind.

n. 2. 2) der Winkel ADB in einem Halbkreise ist jederzeit ein rechter; der in einem kleinern Abschnitte EDB ein stumpfer, der in einem grössern FDB ein spitzer Winkel.

§. 90.

Fig. 49. Die gerade Linie DE, welche die Mitte F einer Sehne AB senkrecht trift, theilet jeden ihrer Bogen ADB und AEB in zween gleiche Theile, und begreift den Mittelpunkt des Kreises in sich.

Beweis. Wenn man A und B mit D und E durch gerade Linien verbindet, so ist in den Dreiecken AFD, und BFD die Seite $DF = DF$, $FA = FB$, und $o = r$. Daher $DA = DB$ und der Bogen $DA = DB$. Wenn man die Dreiecke AFE und FEB vergleicht, so siehet man ebenfalls, daß der Bogen $AE = BE$ sey. Daher $AD + AE = DB + BE$ und in DE der Mittelpunkt des Kreises seyn muß (§. 85.).

§. 91.

§. 91.

Wenn eine geradelinichte Figur (ein Vieleck) lauter gleiche Seiten und Winkel hat, so nennet man dieselbe eine reguläre (ordentliche) Figur: hat sie nicht lauter gleiche Seiten und Winkel, so heißt sie irregulär.

§. 92.

Wenn an einander grenzende gleiche Sehnen AB, BC, u. s. f. den ganzen Kreis bespannen, so ist die Figur, welche sie einschliessen, regulär. Fig. 50.

Beweis. Sind die Sehnen gleich, so sind es auch die Bogen, und folglich auch die Winkel, von welchen jeder zween Bogen weniger bespannet, als die Figur Seiten hat.

§. 93.

Die Seite AB des regulären Sechsecks ist dem Halbmesser AC des umschriebenen Kreises gleich. Fig. 50.

Beweis. Der Bogen AB ist $\frac{1}{6}$ des Umfanges, enthält daher 60°. Zieht man nun den Halbmesser OB, so hat im Dreiecke AOB der Winkel C auch 60°, hiemit A + B = 120°. Da nun aber A = B (§. 47) so hat ein jeder 60°. Daher ist das Dreieck ein gleichseitiges (§. 48. n. 2.) und AB = AO.

Aufgaben.

§. 94.

Einen Kreisbogen (AB) in zween gleiche Theile zu theilen.

Fig. 51. Aufl. Man suche zween Punkte P und Q die von A und B gleich weit abliegen, und verbinde sie durch eine gerade Linie PQ; so ist AR = RB.

Beweis. Die Linie PQ ist durch die Mitte der Sehne AB senkrecht gezogen (§. 64.) und hat daher ihren Bogen in zween gleiche Theile getheilt (§. 90.).

§. 95.

Fig. 52. Eines Bogens (AB) Mittelpunkt zu finden.

Aufl. Man schneide darin zwei beliebige Stücke AC und DB ab, und theile jedes derselben in zween gleiche Theile; so werden die Linien PQ und RS, durch welche es geschieht, einander im Mittelpunkte durchschneiden. (§. 90.)

§. 96.

Fig. 53. Eines Kreises Mittelpunkt zu finden.

Aufl. Man ziehe eine Sehne AB, richte auf der Mitte derselben eine senkrechte Linie EF auf, und verlängere sie bis zum Umfange. Alsdenn theile man sie in zween gleiche Theile, so ist der gefundene Punkt C der gesuchte. (§. 90.)

§. 97.

Fig. 54. Durch drei gegebene Punkte A, B, C, die nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Aufl. Man suche zu zween beliebigen Punkten der gegebenen A und B zween andere P und Q; zu dem dritten C und einem der vorigen

rigen B, noch zween R und S, die gleich weit von denselben abstehen. Der Punkt O, wo die Linien PQ und RS einander durchschneiden, ist der Mittelpunkt, und jede der Linien OA, OB, OC ein Halbmesser.

Beweis. Ziehet man die Linien OA, OB, OC und AB, BC, so ist in den Dreiecken ODA und ODB die Seite OD = OD, DA = DB und r = x (§. 64.), daher OA = OB. In den Dreiecken OEB und OEC aber ist OE = OE, BE = EC und v = z. Daher OC = OB = OA. Die Punkte A, B, C stehen deswegen von O gleich weit ab, und es kann durch sie ein Kreis beschrieben werden. (§. 16. n. 2.)

§. 98.

Einem Kreise ein reguläres Vieleck von einer bestimmten Zahl Seiten einzuschreiben.

Aufl. Mit Hülfe des Transporteurs kann es auf folgende Art geleistet werden. Man theilet mit der Zahl der Seiten, die das Vieleck haben soll, die 360 Grade des Kreises, und trägt einen Winkel von so vielen Graden, als herausgekommen sind, am Mittelpunkt desselben. Dann verlängert man die beiden Schenkel des Winkels, bis sie die Peripherie durchschneiden, und verbindet beide Durchschnittspunkte durch eine gerade Linie. Endlich mißt man diese Linie, und trägt sie so oft als nöthig im Kreise herum.

§. 99.

Man hat verschiedene Methoden, die Grösse der Sehne zu finden, die sich im Kreise so vielmal herumtragen läßt, als das Vieleck Seiten haben soll. Sie lassen sich zwar nicht alle aus bisherigen Gründen erklären, treffen aber doch richtig zu, und sind nützlich zu wissen.

1) Für das reguläre Sechseck ist der Halbmesser des Kreises die herumzutragende Sehne (§. 93.).

Fig. 55. 2) Für das reguläre Dreieck findet man die Seite, wenn man aus einem beliebigen Punkte C der Peripherie dieselbe mit der Eröfnung des Halbmessers in zween Punkten D und E durchschneidet. Diese Punkte verbinde man durch eine gerade Linie DE, welche die Seite des regulären (gleichseitigen) Dreieckes ist.

Beweis. Wenn man die Sehne DE noch zweimal im Kreise herumträgt, und die Seiten DB und BE ziehet; so bespannt jeder Winkel den dritten Theil des Umfanges, und hat daher als ein Winkel am Umfange 60°. (§. 89.) Das Dreieck DBE ist folglich ein gleichseitiges (§. 48. n. 2.).

§. 100.

Fig. 55. 3) Theilet man die für das reguläre Dreieck gefundene Sehne in zween gleiche Theile, so ist die Hälfte derselben DF ohngefähr die Seite des regulären Siebenecks.

4) Für

4) Für das reguläre Fünfeck findet man die Seite auf folgende Art. Man ziehet einen Durchmesser AB, setzt auf die Mitte desselben eine senkrechte Linie CD, und theilt den Halbmesser CB in zween gleiche Theile. Aus dem gefundenen Punkte E beschreibt man mit der Eröfnung von ED einen Bogen von D bis an den Halbmesser AC. Von dem Punkte F, wo derselbe durchschnitten worden, zieht man bis D eine gerade Linie FD, welche die Seite des regulären Fünfecks ist. Fig. 56.

§. 101.

5) Für das reguläre Viereck findet man die Seite, wenn man zween Durchmesser auf einander senkrecht ziehet, und ihre Enden verbindet (§. 85.). Fig. 57.

6) Theilet man den Bogen AB, den eine Seite des Quadrates bespannet, in zween gleiche Theile, so ist die Sehne deshalb so grossen Bogens AR die Seite des regulären Achtecks.

§. 102.

Auf einer geraden Linie (AB) ein reguläres Vieleck, dessen Polygonwinkel (m) gegeben wird, aufzurichten. Fig. 50.

Aufl. Man mache B = m und seinen andern Schenkel BC = AB. Darauf beschreibe man durch die drei Punkte A, B, C einen Kreis, und trage die Sehne AB = BC so oft es angeht, darin herum.

Anmerk. Der Polygonwinkel muß aber bei dieser Aufgabe so gegeben werden, wie es die Zahl der Seiten nach (§. 54.) erfordert. Die Grösse eines solchen Winkels erfährt man, wenn man die Summe aller Winkel im verlangten Vieleck durch die Zahl der Seiten theilt.

§. 103.

Fig. 50. Ist der Winkel nicht gegeben worden, so muß man seine Grösse suchen. Das herausgekommene theilt man, und trägt mit dem Transporteur die eine Hälfte in A, und die andere in B. Darauf verlängert man die Schenkel der Winkel, bis sie sich in einem Punkte O durchschneiden. Dieser ist der Mittelpunkt eines Kreises, welchen man mit der Eröfnung von O A beschreiben, und in welchem man die Sehne A B so oft es angeht, herumtragen kann.

§. 104.

Zur Beschreibung eines Kreises auf dem Felde bedient man sich des Stangenzirkels, oder einer Leine, welche man im Mittelpunkte befestiget, und an welche man in der verlangten Weite einen Stift anhält, mit dem man den Umfang des Kreises bezeichnet.

§. 105.

Ein reguläres Vieleck abzustecken.

Aufl. Man stelle sich mit dem Astrolabium im Mittelpunkt, zähle die Grade ab, die der Winkel am Mittelpunkt in dem verlangten Vieleck haben muß (§. 98), und lasse jedesmal in der Linie, die man mit dem dioptern

Lineal

Lineal übersieht, in stets gleicher Entfernung vom Mittelpunkte des Instruments Stäbe einstecken; so sind die zusammengezogenen Endpunkte oder die Linien, welche die Stäbe bezeichnen die Seiten des regulären Vielecks.

VI. Von der Aehnlichkeit geradelinichter Figuren.

§. 106.

So wie man zwo verschiedene Zahlen auf die Weise mit einander vergleichen kann, daß man die grössere durch die kleinere theilt, um zu erfahren, wie vielmal die eine grösser ist als die andere: eben so kann man zwo verschiedene Linien (AB, und CD) mit einander vergleichen, wenn man beide zuvor in gewisse Theile von gleicher Grösse eintheilt, durch die Zahlen der darin angenommenen Theile wird das Verhältniß der einen zur andern bestimmt. Fig. 58.

§. 107.

Man sagt, daß 4 Zahlen in Proportion stehen, wenn sich die erste zur zwoten eben so verhält als die dritte zur vierten. Auf gleiche Weise sind 4 Linien einander proportional, wenn die erste in der zwoten so oft enthalten ist, als die dritte in der vierten. Z. B. Wenn AB $\frac{2}{3}$ von CD ist, und EF ebenfalls $= \frac{2}{3}$ GH; so sind die 4 Linien einander proportional. Fig. 58. Dieses pflegt man so auszudrücken AB: CD = EF: GH.

§. 108.

Da alle 4 Liniengrössen von gleicher Art sind, so kann man auch durch Verwechselung der mittlern Linien eine andere gleichfalls richtige Proportion herausbringen. Z. B. Wenn AB:CD = EF:GH, so ist auch AB:EF = CD:GH, oder die erste verhält sich zur dritten, wie die zwote zur vierten.

§. 109.

Geradelinichte Figuren sind einander ähnlich, wenn alle Winkel der einen in eben der Ordnung genommen gleich sind, und die Seiten der einen sich unter einander verhalten, wie die gleichgelegenen Seiten der andern. Diese Beschaffenheit der Figuren pflegt man durch Zwischensetzung des Zeichens ∽ anzudeuten.

§. 110.

Aus diesem Begriffe von der Aehnlichkeit der Figuren folgt:

1) Figuren, die sich decken, sind nicht nur gleiche, sondern auch ähnliche Figuren, weil die Winkel in denselben gleich sind, und die gleichliegende Seiten unter einander einerlei Verhältniß haben.
2) Zwo Figuren, die einer dritten ähnlich sind, sind es auch unter sich.
3) Alle reguläre Vielecke, welche gleich viel Seiten haben, sind ähnliche Figuren. Denn alle Winkel sind gleich, so wie auch die Seiten, deren jede 2 in dem einen Vieleck

mit

mit jeden 2 in dem andern einerlei Verhältniß geben.

4) Alle Kreise sind ähnliche Figuren.

§. 111.

Wenn man in einem Dreiecke (ABC) mit der einen Seite BC eine Parallellinie DE zieht, so schneidet dieselbe ein Dreieck ADE ab, welches dem grossen ABC ähnlich ist. Fig. 59.

Beweis. Die Winkel sind in beiden stückweise einander gleich A = A, x = r, n = s, (§. 33. n. 2.) Da nun DE in gleicher Entfernung von BC zwischen die Schenkel eben desselben Winkels A gezogen ist, so schneidet sie von beiden Linien AB und AC Stücke ab, welche mit den genannten Linien in Proportion stehen. AD:AB = AE:AC und AD:DE = AB:BC. Daher das Dreieck ADE ∽ ABC.

§. 112.

Dreiecke sind einander ähnlich,

1) wenn entweder zween Winkel a und b des einen, zween Winkeln A und B des andern gleich, oder Fig. 60.

2) zwo Seiten ab, ac des einen zween Seiten AB, AC des andern proportional, und die Winkel dazwischen a und A gleich; oder

3) alle Seiten des einen den Seiten des andern proportional sind.

Beweis. Man trage die Seite ab des kleineren Dreiecks auf die Seite AB des grösseren, aus dem Winkel A gegen D, und ziehe

DE

DE mit BC parallel; so ist das Dreieck ADE ∽ ABC. (§. 111.)

1) Es ist ab = AD, a = A und b = B oder x (§. 33. n. 2.). Daher kann das Dreieck abc das Dreieck ADE decken, und ist ebenfalls dem grossen ABC ähnlich.

2) Weil a = A, so fällt ab auf AB und ac auf AC. Da nun ab und ac den Seiten AB und AC proportional seyn sollen, das ist, da ab von AB ein so grosser Theil seyn soll, als ac von AC ist; so muß die Linie DE bei x einen Winkel = b machen. Wäre x > b, so würde DE in N fallen und wäre x < b; in S. Dann blieben aber die Seiten nicht mehr einander proportional. Daher ist x = b, und folglich o = c (§. 45. n. 3.) das Dreieck abc ist wie vorhin dem Dreieck ADE gleich, und beide dem grossen ABC ähnlich.

3) Es ist ab = AD, ac = AE. Da nun auch ab von AB ein so grosses Stück seyn soll als bc von BC ist, so ist auch bc = DE. Das Dreieck abc deckt das Dreieck ADE und beide sind dem grossen ABC ähnlich.

§. 113.

Fig. 61. Die gerade Linie (BD), welche in einem rechtwinklichten Dreieck ABC aus der Spitze des rechten Winkels B auf die Hypothenuse senkrecht gezogen wird, theilet dasselbe in zwei Dreiecke ADB und BDC, welche sowohl dem ganzen ABC als einander ähnlich sind.

Be-

Beweis. In den Dreiecken ADB und ABC ist A = A und B = x, und in den Dreiecken DBC und ABC ist C = C, B = r, daher sind die Dreiecke ABD und BDC dem ganzen ABC (§. 112. n. 1.) als auch einander ähnlich. (§. 110. n. 2.)

§. 114.

Wenn zwei Vielecke sich durch Diagonallinien in Dreiecke theilen lassen, welche in eben der Ordnung genommen einander ähnlich sind; so sind die ganzen Vielecke ähnliche Figuren.

Aufgaben.

§. 115.

Zu drei gegebenen Linien (AB, AC, AD) die vierte Proportionallinie zu finden. Fig. 62.

Aufl. Man verbinde zwo gerade Linien unter einem beliebigen Winkel A, und trage auf den einen Schenkel desselben die 2 ersten von den gegebenen Linien AB und AC in B und C, und die dritte AD auf den andern Schenkel in D. Alsdenn verbinde man DB und aus C mit derselben eine Parallellinie CP, so ist AP die gesuchte Linie (§. 111.)

§. 116.

Eine gerade Linie (AB) nach eben dem Verhältniß einzutheilen, wonach eine andere AP getheilt ist. Fig. 63.

Aufl. Man setze beide unter einem beliebigen Winkel zusammen, verbinde ihre Enden B und P durch eine gerade Linie, und ziehe aus

allen

allen Theilungspunkten L, M, N, O von AP mit ihr Parallellinien LD, MC, NE, OF; so schneiden diese die verlangten Theile ab.

§. 117.

Fig. 64. Eine gerade Linie AB in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Aufl. Man trage eben so viel gleiche Theile AP, PQ u. s. f. von beliebiger Grösse auf eine andere Linie AZ, und theile hernach AB nach eben diesem Verhältniß, nach welchem AT die Summe der aufgetragenen Theile getheilt ist.

§. 118.

Fig. 65. Auf einer geraden Linie ab ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen ABC ähnlich sey, so daß ab und AB gleichgelegene Seiten werden.

Aufl. Man mache a = A und b = B, und ziehe ihre Schenkel fort, bis sie sich in c durchschneiden; so ist das Dreieck abc ∽ ABC. (§. 112. n. 1.)

VII. Von künstlicher Messung solcher Linien, denen man auf dem Felde nicht beikommen kann.

§. 119.

Die Linien, von denen hier die Rede ist, sind entweder Horizontallinien, d. i. Längen, Breiten, Weiten u. dgl. oder Vertikallinien, d. i. Höhen oder Tiefen. Bei Messung der erstern sind die Fälle verschieden, je nachdem man zu

ihren beiden Enden, zu einem oder gar keinem kommen kann.

§. 120.

Wenn man die Weite (AB) zweener Oerter A und B messen soll, von deren einem man nicht gerade zu dem andern kommen kann, die man aber doch aus einem dritten Orte C sehen, und deren Abstand von demselben man messen kann; so verfährt man, nach Verschiedenheit des Werkzeugs verschiedentlich, auf folgende Art: Fig. 66.

A) Mit Stäben und Meßkette, wenn der Boden nicht allzu uneben ist. Man sticht in C einen Stab, mißt AC und BC, und trägt beide in gerader Linie zurück, jene in E, und diese in D, wo man Stäbe einsticht. Darauf mißt man DE, welche = AB ist. (§. 46. n. 2.) n. 1.

Anstatt der ganzen Linien AC, BC kann man die Hälften oder kleinere Theile derselben zurücktragen in d und e. Alsdenn ist aber auch de die Hälfte oder der eben so vielte Theil von AB. (§. 112. n. 2.)

B) Mit dem Meßtische geschieht es folgendermaaßen. Man setzt ihn in den gewählten Standpunkt C, legt das Diopternlineal neben den Punkt c an, welcher mit dem Punkte unter dem Meßtische genau übereinstimmen muß, und nimmt den Winkel C auf. Dann mißt man die Linien CA und CB, und trägt eben so viele Theile des n. 2.

ver-

verjüngten Maaßstabes aus c in a und b. Endlich mißt man ab nach eben dem verjüngten Maaßstabe, und schließt, daß AB eben so viele Theile des grossen Maaßes in sich halte. (§. 112. n. 2.)

§. 121.

Fig. 67. Wenn man die Weite zweener Oerter A und B messen solte, welche so liegen, daß man aus einem gewissen Stande C beide sehen, des einen A Abstand von ihm messen, und aus A den andern B sehen kann; so verfährt man folgendermaaßen.

n. 1. A) **Mit Stäben und Meßkette.** Man sticht einen Stab in C, und einen andern in der verlängerten Linie AB in D. Dann mißt man DC und AC, und trägt sie zurück, diese nach E, und jene nach F, woselbst man Stäbe einsticht. In der Linie FE geht man so weit fort, bis man C mit B in gerader Linie sieht, und sticht daselbst in G einen Stab; so ist GE = AB.

Beweis. Weil EG mit AB parallel, so sind die Winkel CAB und CEG gleich (§. 33. n. 1.). Bei C sind Vertikalwinkel, und die Seite AC ist gleich der Seite CE. Daher ist GE = AB. (§. 46. n. 1.)

Hätte man anstatt AC, und DC einen gewissen Theil derselben zurück getragen, so würde auch die Linie ge der eben so vielte Theil von AB seyn. (§. 112. n. 1.)

B) Mit

B) **Mit dem Meßtische.** Man sticht, wie vorhin, in D einen Stab, und setzt den Meßtisch in C. Hier nimmt man die Winkel DCA und ACB auf, mißt CD und LA, und trägt sie nach dem verjüngten Maaßstabe aus c in d und a. Darauf ziehet man da fort bis b, und mißt ab, deren Maaß im Großen genommen = AB ist (§. 112. n. 1). n. 2.

C) Eben dieses kann auch **mit dem Meßtische** auf eine andere Art geleistet werden. Man läßt den Stab in D weg. In C nimmt man den Winkel C auf, mißt CA, und trägt sie nach dem verjüngten Maaßstabe aus c in a. Darauf sticht man in C einen Stab, und trägt den Meßtisch nach A, woselbst man ihn der Linie a C gemäß, das ist, so stellt; daß a gerade über A fällt, und man durch die Dioptern des neben a C liegenden Lineals den Stab in C sieht. Alsdenn legt man das Lineal neben a, sieht nach B, und zieht dahin eine gerade Linie, welche die aus C gezogene in b durchschneidet. Endlich mißt man ab, deren Maaß im Großen genommen = AB ist. (§. 112. n. 1.) n. 3.

§. 122.

Wenn man eine **Weite AB messen soll, zu deren keinem Ende man kommen kann**; so verfährt man folgendermaaßen: Fig. 68.

A) **Mit Stäben und Meßkette.** Man wählt ohngefähr gleich weit von beiden Oertern A und B einen Stand C, aus welchem n. 1.

man sie sehen kann. Alsdenn muß man jede Weite AC, BC besonders (nach §. 121.) messen, und sie in E und D zurücktragen. Zuletzt mißt man DE, welche = AB ist. (§. 46. n. 2.)

n. 2. B) Mit dem Meßtische. Man erwählt zween Stände C und D, in deren einen C man zuerst den Meßtisch stellt, da indessen in den andern D ein Stab gestochen wird. In C nimmt man die Winkel ACB und BCD auf, mißt CD, und trägt ihr Maaß nach dem verjüngten Maaßstabe aus c in d. Darauf trägt man den Meßtisch nach D, nachdem man vorher in C einen Stab gestochen, und stellt ihn hier der Linie dC gemäß. Dann legt man das Lineal neben d an, und zieht nach A und B gerade Linien, welche die vorhin nach diesen Gegenden gezogene in a und b durchschneiden. Endlich mißt man ab, welche nach dem großen Maaße genommen = AB ist.

n. 3. C) Auch ohne Versetzung des Meßtisches kann eben dieses aus dem Stande C geschehen. Man sticht ausser dem Stabe in D einen andern in E in gerader Linie mit DB, und einen andern in F, in gerader Linie mit E und A. Alsdann legt man das Lineal neben c, und sieht nach A und B und den eingesteckten Stäben, und zieht jedesmal Linien auf dem Papier. Die Weiten CF, CE, CD mißt man, und trägt sie nach dem verjüngten

ten

ten Maaßstabe aus c in f, d, e. Durch ed und ef ziehet man gerade Linien, welche CB und CA in b und a durchschneiden. Endlich mißt man ab, welche im Großen genommen = AB ist.

§. 123.

Bei Messung der Höhen bildet man sich allezeit eine Horizontallinie cH ein, welche vom Mittelpunkte des Instruments, oder dem Punkte, neben welchen das Lineal angelegt wird, gerade auf die zu messende Linie geht; und man untersucht sowohl die Höhe AH des Gipfels A über dieser Linie, als auch die Tiefe BH unter derselben. Da man den senkrechten Abstand des Gipfels A von der Erde wissen will, so trift die Vertikallinie AB jene Horizontallinie cH senkrecht, und die hier entstehenden Dreiecke sind allezeit rechtwinklicht. Fig. 69.

§. 124.

Wenn man eine Höhe AB messen will, zu deren Fuße B man aus einer gewählten Station C kommen, und ihre Weite CB von derselben messen kann; so verfährt man mit dem Meßtische auf folgende Art: Fig. 69.

Man zieht vorher auf demselben mit einer Seite DE eine Parallellinie ch. Dann stellt man denselben vertikal gegen die zu messende Linie, und richtet die Seite DE desselben mit der Setzwage wagerecht. Darauf legt man das Lineal neben einem beliebigen Punkte c in der Linie ch, und zielt nach A und B, wohin man

Linien zieht. Die Linie CB mißt man horizontal, und trägt sie nach dem verjüngten Maaßstabe auf dem nun wieder umzukehrenden Meßtische aus c auf die benannte Parallellinie in h, durch welchen Punkt man a b senkrecht zieht. Diese Linie im Grossen genommen, ist der Höhe AB gleich. (§. 112. n. 1.)

Bei ebenem Boden kann man anstatt der Höhe HB die Höhe des Instruments nehmen.

§. 125.

Man hat noch andere Methoden, die vorhergehende Aufgabe aufzulösen, welche aber der erwähnten nicht gleich zu schätzen sind.

A) Man bedient sich nämlich zweener Stäbe von ungleicher Länge, sticht den längern in einiger Entfernung von der zu messenden Höhe, und weiter fort von jenem den kürzern Stab, so daß die Spitze des kleinern, die Spitze des grössern, und den Gipfel der Höhe deckt. Darauf mißt man die Höhe der Stäbe über der Erde, ihre Entfernung von einander, und die Entfernung des kleinern Stabes, von der zu messenden Höhe, und schließt: wie die Entfernung der beiden Stäbe sich zum Unterschiede ihrer Höhe verhält, so verhält sich die Entfernung des kleinern Stabes von der Mitte des Thurmes zum Unterschiede ihrer Höhe. Z. B. Es sey der kleinere 4′ hoch, der grössere 10′, der Unterschied ihrer Höhe 6′. Ihre Entfernung sey 5′, und die Entfernung des klei-

kleinern Stabes von der Mitte des Thurmes 65′, so rechnet man

$$5' : 6' = 65' :$$

6

5|390|78′
4′ Höhe des kleinern Stabes

82′ Höhe des Thurmes.

B) Auch kann man nach der Länge des Schattens, den ein Thurm auf einen ebenen Platz wirft, seine Höhe messen. Man vergleicht denselben mit der Länge des Schattens, den ein Stab zu eben der Zeit wirft, dessen Höhe bekannt ist, und schließt: wie die Länge des Schattens vom Stabe sich zur Höhe desselben verhält, so verhält sich auch die Länge des Schattens vom Thurme zur Höhe desselben.

§. 126.

Wenn man eine Höhe A Q messen will, zu deren Fuße Q man nicht kommen kann; so geht man mit dem Meßtische folgendergestalt zu Werke: Fig. 70.

Man wählt zwo Stationen in D und C. In den ersten D stellt man den Meßtisch, und bemerkt alles, was §. 124. erinnert worden, und zieht nach A und B gerade Linien. In C sticht man einen Stab, mißt die Höhe D d, und macht in eben dieser Höhe in C ein Zeichen am Stabe, worauf man aus d gegen C eine Linie zieht. D C mißt man und trägt sie

verjüngt aus d in c. Dann sticht man in D einen Stab, und macht in der bemerkten Höhe D d ein Zeichen an demselben. Den Meßtisch bringt man darauf nach C, und legt das Lineal neben c, so daß c die Stelle des am Stabe gemachten Zeichens einnehme, welches man durch einen Maaßstab erfahren kann, mit dem man vorhin C c = D d gemessen hat. Hierauf richtet man den Meßtisch wagerecht. Wenn man nun das Lineal neben c d anlegt, nach dem vorigen Stande zielt, und das Zeichen in D erblickt; so steht der Meßtisch richtig. Darauf zieht man gegen A und B Linien, welche die vorigen in a und b durchschneiden. Durch diese Punkte zieht man auf die Horizontallinie d h die senkrechten Linien a r und b h, welche zusammen im Großen genommen = A Q sind.

Anmerk. Man kann auch eine Höhe aus über einander liegenden Stationen messen.

Der Geometrie
Zweiter Theil.
Von den ebenen Flächen.

§. 127.

In diesem Theile werden die Figuren nach ihrer Grösse, d. i. nach dem darin enthaltenen

haltenen Flächenraum betrachtet, und mit einander verglichen.

I. Von Dreiecken und Parallelogrammen.

§. 128.

Die Dreiecke, denen eins von den §. 46. angezeigten Merkmahlen ihrer Gleichheit zukommt, haben auch einen gleichen Flächeninhalt; denn sie können einander decken.

§. 129.

Zur Grundlinie eines Dreiecks (ABC) oder Parallelogrammes (ABCE) kann jede Seite desselben AB angenommen werden. Seine Höhe aber ist die gerade Linie CD, welche von der (nöthigen Falles verlängerten) Grundlinie senkrecht aufgerichtet wird, und bis an die gegenüberstehende Ecke C des Dreieckes oder Seite CE des Parallelogrammes reicht. Fig. 71.

§. 130.

Wenn man gleich hohe Dreiecke (ABC, DEF) mit ihren Grundlinien (AB und DE) in eine gerade Linie stellt; so liegen die gegenüberstehenden Spitzen C und F derselben in einer mit der Grundlinie parallelen Linie. Fig. 72.

Beweis. Man ziehe die Höhen CI, FK, und verbinde CF. Alsdenn sind CI und FK gleich nach der Voraussetzung, und wegen der Winkel bei I und K parallel (§. 33.). Daher ist IKFC ein Parallelogram, und CF mit IK oder AE parallel.

Anmerk. Dieser Satz läßt sich auch auf alle Parallelogramme, welche gleiche Höhe haben, anwenden.

§. 131.

Hieraus folgt, daß, Dreiecke oder Parallelogramme, welche zwischen zwo Parallellinien stehen, eine gleiche Höhe haben.

§. 132.

Fig. 73. Die Parallelogramme (AC und AE), welche gleiche Grundlinien und Höhen haben, sind gleich groß, oder haben einerlei Flächeninhalt.

Beweis. Wenn man beide Parallelogramme auf eine Grundlinie AB zwischen zwo Parallellinien AB und DE stellt; so ist in den Dreiecken DAF und CBE, DA = CB, AF = EB. Fällt nun

n. 1. 1) DC und FE in einander, so ist DC − FC = FE − FC, d. i. DF = CE, die Dreiecke sind also gleich. Legt man nun beiden das Stück AFCB zu, so müssen auch die daraus entstandene Parallelogramme gleich groß seyn.

n. 2. 2) Fällt DC und FE ausser einander, so ist DC + FC = FE + FC, d. i. FD = CE. Daher sind die Dreiecke gleich. Legt man nun beiden AOB zu, und nimmt ihnen COF weg, so müssen ebenfalls die Parallelogramme AC und AE gleich seyn.

§. 133.

Fig. 71. Jedes Dreieck (ABC) ist die Hälfte eines Parallelogrammes, welches mit ihm gleiche Grundlinie (AB) und Höhe (CD) hat.

Be=

Beweis. Man ziehe durch C mit AB, und durch B mit AC Parallellinien, so entsteht ein Parallelogram AE, dessen Grundlinie und Höhe ebenfalls AB und CD sind.

In den Dreiecken ABC, und BCE ist AC = BE, AB = CE, und CB = CB. Daher sind beide gleich, und jedes halb so groß als das Parallelogram AE, mit dem es gleiche Grundlinie und Höhe hat.

§. 134.

Hieraus erhellet, daß auch die Dreiecke gleich sind, welche gleiche Grundlinien und Höhen haben, weil sie die Hälften gleicher Parallelogramme sind.

§. 135.

Wenn man überhaupt zwei Parallelogramme (AC und AF) mit einander vergleichen will, um zu erfahren, wie vielmal das eine grösser ist als das andere: so muß man die Grundlinien und Höhen derselben in gewisse gleiche Theile eintheilen. Die Zahlen der darin angenommenen Theile vervielfältiget man mit einander, und schließt: so wie sich die vielfache der Grundlinie eines jeden mit seiner Höhe verhalte, so verhalten sich die Parallelogramme selbst unter einander. Fig. 74.

Beweis. Man theile die Grundlinie AB und AE eines jeden Parallelogrammes in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, und ziehe aus jedem Theilungspunkte mit FE Parallellinien; so wird jedes Parallelogram in so viel kleine

gleiche Parallelogramme eingetheilt, als die Grundlinie eines jeden Theile hat. Eben so theile man auch ihre Höhen AG und AD in gewisse gleiche Theile, und ziehe aus jedem Theilungspunkte mit der Grundlinie AE Parallellinien; so wird wiederum jedes kleine Parallelogram in so viel kleinere Parallelogramme getheilt, als die Höhe eines jeden Theile hat. Um nun die Zahl aller kleinen Parallelogramme zu finden, die in jedem der gegebenen AC und AF enthalten sind, muß man die Grundlinie eines jeden mit seiner Höhe vervielfältigen. So wie diese Vielfache sich unter einander verhalten, so verhalten sich die Parallelogramme selbst unter einander.

§. 136.

Quadrate verhalten sich daher unter einander, wie die Quadratzahlen ihrer Seiten. Weil bei dem Quadrate die Grundlinie der Höhe gleich ist, so darf man nur eine Seite mit sich selbst vervielfältigen. Die Zahl, welche daraus entsteht, nennet man die Quadratzahl. Daher schließt man, wie der Satz sagt.

§. 137.

Fig. 75. n. 1. In jedem rechtwinklichten Dreieck (ABC) ist das Quadrat der Hypothenuse AC so groß, als die Quadrate beider Katheten AB und BC zusammen genommen.

Beweis. Man beschreibe auf jeder Seite ihr Quadrat, und ziehe BD senkrecht; so sind

AD

AD und DC Rechtecke. Ferner ziehe man IC, BE, BF, und GA.

In den Dreiecken IAC und BAE ist IA = AB, AC = AE. Die Winkel IAC und BAE sind jeder aus einem rechten, und aus dem Winkel BAC zusammengesetzt, folglich gleich. Daher das Dreieck IAC = BAE (§. 46. n. 2.). Das erstere steht mit dem Quadrate IB auf einer Grundlinie IA zwischen den Parallellinien IA und KC, hat also gleiche Höhe mit demselben (§. 131.). Das andere steht mit dem Rechtecke AD auf AE zwischen AE und BD. Daher sind die Dreiecke die Hälften der gedachten Parallelogramme (§. 133.). Sind nun die Hälften gleich, so sind auch das Quadrat IB und das Rechteck AD einander gleich.

Eben so läßt sich beweisen, daß das Quadrat BG dem Rechtecke DC gleich ist, und folglich IB + BG = AD + DC = AF.

Anmerk. Mechanisch läßt sich dieser Satz, den man von seinem Erfinder den Pythagoräischen Lehrsatz nennet, beweisen, wenn man alle Seiten der Quadrate in gewisse gleiche Theile eintheilt, z. B. jede Seite des Quadrats der kleinen Kathete bc in 3 gleiche Theile, so wird dasselbe, wenn man aus allen Theilungspunkten Linien zieht, 9 kleinere Quadrate enthalten. Hat nun die Seite des Quadrats der grossen Kathete ac 4 Theile, so enthält es 16 kleinere Quadrate (§. 136). Beide zusammen enthalten daher 25. Nun hat aber die Hypothenuse ab 5 solcher Theile, ihr Quadrat also 25 kleinere Quadrate. Dieses ist folglich so groß, als die Quadrate beider Katheten zusammen genommen. n. 2.

II. Von

II. Von regulären Vielecken und dem Kreise.

§. 138.

Fig. 76. Jedes reguläre Vieleck (ABCDE) ist einem Dreiecke (AOI) gleich, dessen Grundlinie AI so groß ist, als der ganze Umfang des Vielecks, und dessen Höhe so groß ist, als die Höhe OL eines der Dreiecke, in welche das Vieleck aus dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises getheilt werden kann.

Beweis. Das Dreieck AOI enthält die Grundlinien aller der Dreiecke in sich, aus welchen das reguläre Vieleck besteht. Alle kleinern Dreiecke AOB, BOF u. s. f. haben auch gleiche Höhe mit den Dreiecken AOB, BOC u.s.f. Sie sind daher einzeln genommen einander gleich (§. 134.) und das Dreieck AOI als ihre Summe ist so groß als das Vieleck.

§. 139.

Fig. 77. Jeder Ausschnitt (ACB) eines Kreises ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie so groß als der Bogen (AB), und dessen Höhe dem Halbmesser (AC) gleich ist.

Beweis. Man theile den Bogen AB in so viele kleine Theile Ad, de u. s. f. daß jeder derselben von einer geraden Linie nicht merklich unterschieden ist, und ziehe aus den Theilungspunkten die Halbmesser dC, eC u.s.f.; so wird der Ausschnitt in eine Menge Dreiecke getheilt, deren Grundlinien zusammen den Bogen AB aus-

ausmachen, und deren Höhen den Halbmessern gleich sind. Alle diese Dreiecke sind in einem Dreiecke enthalten, welches bei gleicher Höhe eine so grosse Grundlinie hat, als alle Dreiecke zusammen genommen.

§. 140.

Der ganze Kreis ist daher einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie so lang, als die Peripherie, und dessen Höhe dem Halbmesser gleich ist.

Beweis. Man kann die Peripherie ebenfalls in so viele kleine Theile eintheilen, daß jeder derselben für eine gerade Linie zu halten ist. Zieht man alsdann von jedem Theilungspunkte einen Halbmesser, so entstehen eine Menge kleinere Dreiecke, deren Grundlinien zusammen die Peripherie ausmachen, und deren Höhen von den Halbmessern fast gar nicht verschieden sind. Setzte man alle ihre Grundlinien an einander, so würde ein grosses Dreieck entstehen, das den ganzen Umfang des Kreises zur Grundlinie hat, und dessen Höhe der Halbmesser desselben ist.

Aufgaben

von Eintheilung und Verwandlung der Figuren.

§. 141.

Ein Dreieck oder Parallelogram in eine verlangte Anzahl gleicher Theile zu theilen. Fig. 78.

Aufl.

Aufl. Man theile eine beliebige Seite AB in so viele gleiche Theile (§. 117.), und ziehe
n. 1. aus allen Theilungspunkten, in dem Dreiecke nach der gegenüber liegenden Spitze C, in dem
n. 2. Parallelogram mit der angrenzenden Seite BC parallele Linien (§. 134 und 132.).

§. 142.

Fig. 79. Die Seite eines Quadrates zu finden, welches den Quadraten zwoer gegebenen Linien AB und AC zusammen genommen gleich sey.

Aufl. Man setze die gegebenen Linien rechtwinklicht an einander, und verbinde ihre Enden B und C; so ist BC die gesuchte Linie (§. 137.).

Anmerk. Durch eine Wiederholung dieser Arbeit lassen sich so viele Quadrate, als man will, nach und nach in eines verwandlen, d. i. ein Quadrat finden, welches mit den gegebenen einen gleichen Flächenraum einschließt. Man setzt nemlich die Seite des dritten Quadrates rechtwinklicht auf die Hypothenuse BC des ersten Dreiecks, und fährt so lange fort, bis die verlangte Seite gefunden worden.

§. 143.

Fig. 80. Ein kleineres Quadrat, dessen Seite AC ist, von einem grössern, dessen Seite AB heißt, abzuziehen.

Aufl. Man theile die Seite AB des grösseren Quadrates in zween gleiche Theile in D, und beschreibe aus D mit der Eröfnung von DB = DA einen halben Kreis über ihr. Aus dem einen Ende des Durchmessers A durch-

schneide

schneide man den Umfang mit der Eröfnung von AC, und verbinde CB, welche die gesuchte Seite eines Quadrates ist, welches übrig bleibt, wenn man das Quadrat von AC von dem Quadrat, dessen Seite AB ist, abziehet. Denn das Dreieck ACB ist rechtwinklicht (§. 89. n. 2.) Folglich (§. 137.)

§. 144.

Einer geradelinichten Figur (ABCDE) eine beliebige Ecke (E), ihrer Grösse unbeschadet abzunehmen, und sie hiermit in eine andere zu verwandeln, welche eine Ecke weniger hat.

Aufl. Man verbinde zwo Ecken A und D, die an eine E grenzen durch eine Diagonallinie, und ziehe mit dieser durch die mittlere Ecke E seine Parallellinie HG; so wird diese die (nöthigen Falles verlängerten) Seiten CD und BA in G und H durchschneiden. Den einen dieser Durchschnittspunkte G verbinde man mit der andern Ecke A; so ist ABCG die verlangte Figur. Fig. 81.

Beweis. Die Dreiecke AED und AGD, und wenn man von beiden AOD wegnimmt, auch die Dreiecke AEO und GOD sind gleich (§. 134.). Daher bleibt die Figur bei Wegnehmung des Dreieckes AEO, und bei Zulegung des Dreieckes GOD gleich groß, ob sie gleich eine Seite weniger hat.

Anmerk. Das gefundene Viereck läßt sich wiederum in ein Dreieck verwandlen, welches mit dem gegebenen Fünfeck gleich groß ist.

§. 145.

§. 145.

Fig. 82. Ein Rechteck zu beschreiben, welches einem gegebenen Dreiecke ABC gleich sey.

Aufl. Man theile eine Seite AB in zween gleiche Theile, und richte sowohl aus ihrer Mitte D, als aus dem einen Ende A senkrechte Linien auf. Durch die Spitze C ziehe man mit AB eine Parallellinie, welche jene senkrechte Linien in E und F durchschneidet. Alsdann ist DEFA das Rechteck.

Beweis. Wenn man FE verlängert, und BG senkrecht aufrichtet, so ist das Rechteck GE = $\frac{1}{2}$ Rechteck AG, weil das letztere zwar gleiche Höhe mit dem ersteren, aber eine doppelt so große Grundlinie hat. Nun ist auch das Dreieck ABC = $\frac{1}{2}$ Rechteck AG, folglich dem Rechtecke AE gleich (§. 133.).

§. 146.

Fig. 83. Ein Quadrat zu beschreiben, welches einem gegebenen Rechtecke ABCD gleich sey.

Aufl. Man verlängere AD und DC, und mache auf der ersten DG = DC. Ueber AG beschreibe man aus der Mitte einen halben Kreis, welcher die verlängerte Linie DC in E durchschneidet. Alsdenn ist DE die Seite, mit welcher das Quadrat beschrieben werden kann.

§. 147.

Auf diese Weise läßt sich jedes geradelinichte Vieleck nach §. 144. nach und nach in ein Dreieck, dieses aber nach §. 145. in ein Rechteck, und dieses nach §. 146. in ein Quadrat ver-

verwandlen, welches man die Quadratur der Figuren nennet. Bei dem Kreise läßt sich keine gerade Linie finden, welche genau der Peripherie desselben gleich wäre. Daher ist die Quadratur des Kreises noch eine Aufgabe, welche nicht aufgelöset worden.

III. Vom Flächenmaaße und Berechnung der Figuren.

§. 148.

Das Maaß einer Ebene muß gleichfalls eine Ebene sein. Der Bequemlichkeit wegen bedient man sich dazu eines Quadrates, dessen Seite eines von den gewöhnlichen Längenmaaßen ist, z. B. eine Ruthe, ein Fuß, eine Meile u. dgl. Von dieser Seite bekömmt das Quadrat den Namen einer Quadratruthe, eines Quadratfußes, einer Quadratmeile u. dgl. Um das Flächenmaaß nicht mit dem Längenmaaße zu verwechseln, kann man sich eines q bedienen, z. B. 6°q heißt 6 Quadratruthen.

§. 149.

Da das geometrische Maaß in 10 Theile eingetheilet wird, so hat das Flächenmaaß, weil es Länge und Breite in sich faßt, 10 mal 10 Theile, d. i. 100. Eine Quadratruthe hat daher 100 Quadratfuß, ein Quadratfuß 100 Quadratzolle u. s. f. Man kann auch leicht eine vorgegebene Zahl im Flächenmaaße

 nach

nach der geringsten unter ihnen lesen, wenn keine dazwischen fehlet, oder an ihrer Stelle eine Nulle gesetzt worden. Man muß nämlich jederzeit von der Rechten gegen die Linke zwo Ziffern abschneiden. Z. B. 93685907‴q heißt 93°, 68′, 59″, 7‴q.

§. 150.

Wenn man ein Flächenmaaß in ein anderes verwandeln soll, so muß man das Verhältniß der Längenmaaße wissen, woher sie genommen sind. Wenn im geometrischen Flächenmaaße die Ruthe 100 Fuß hat, so hat sie im Rheinländischen Maaße 144 Fuß u. s. f. Soll man z. B. 246372″q zehntheiligen Maaßes, in zwölftheiliges verwandlen; so hat man die Sätze

$$100' : 144' = 6372' :$$

wodurch man 91′, 108″, 141‴q. zwölftheiligen Maaßes erhält.

Aufgaben.

§. 151.

Ein Rechteck (ABCD) zu berechnen.

Aufl. Man messe zwo an einander grenzende Seiten nach einerlei Längenmaaße, und vervielfältige die Zahlen mit einander, so wird das Vielfache anzeigen, wie viel kleine Quadrate, deren Seite man zum Maaß genommen, in dem Rechtecke enthalten sind. (§. 135.)

§. 152.

Ein Quadrat zu berechnen.

Aufl. Man messe eine Seite, und vervielfältige sie mit sich selbst, so ist das gefundene der Flächeninhalt desselben.

Anmerk. Ist der Flächeninhalt eines Quadrates gegeben, und man will die Länge einer Seite desselben wissen, so muß man aus der gegebenen Zahl des Flächeninhalts die Quadratwurzel ziehen.

§. 153.

Eine Raute, oder länglichte Raute, zu berechnen.

Aufl. Man nimmt eine Seite derselben für die Grundlinie an, zieht die Höhe senkrecht darauf, mißt beide nach einerlei Längenmaaße, und vervielfältiget sie mit einander. Denn ein schiefwinklichtes Parallelogram ist einem Rechtecke von derselben Grundlinie und Höhe gleich (§. 132.).

§. 154.

Ein Dreieck zu berechnen.

Aufl. Man mißt eine Seite, als die Grundlinie, und die darauf aufgerichtete senkrechte Höhe, vervielfältiget beide mit einander, theilet aber das Vielfache mit 2. (§. 133.)

Man kann auch die ganze Grundlinie mit der halben Höhe, oder umgekehrt, die ganze Höhe mit der halben Grundlinie vervielfältigen; so wird das Vielfache den Flächeninhalt des Dreieckes anzeigen.

Anmerk. Wenn man aus dem gegebenen Flächeninhalte eines Dreieckes, und aus der bekannten Höhe desselben, die Grundlinie finden will, so darf man nur mit der halben Zahl der Höhe den ganzen Inhalt theilen. Und wenn man umgekehrt den Flächeninhalt mit der halben Grundlinie theilet, so findet man die Höhe des Dreieckes.

§. 155.

Ein jedes geradelinichtes Vieleck zu berechnen.

Aufl. Man theilet dasselbe durch Diagonallinien in Dreiecke, berechnet jedes besonders, und zählet alsdann ihre Inhalte zusammen. Hiebei kann man sich des Vortheils bedienen, daß man eine Diagonallinie für die Grundlinie zweier Dreiecke annimmt.

§. 156.

Wenn das Vieleck eine reguläre Figur,
Fig. z. B. ein Fünfeck ist, so darf man nur den
76. Inhalt eines der Dreiecke suchen, in welche das Vieleck aus dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises getheilt werden kann. Diesen Inhalt vervielfältiget man mit der Zahl der Seiten des Vieleckes, so ist das Vielfache der Flächeninhalt des ganzen regulären Vieleckes.

IV. Von Berechnung des Kreises insbesondere.

§. 157.

Da der Kreis einem Dreiecke gleich ist, dessen Grundlinie der Peripherie, und dessen Höhe dem Halbmesser gleich ist; (§. 140.) so läßt sich der Flächeninhalt eines Kreises berechnen, wenn man die Länge der Peripherie und des Durchmessers kennet. Man vervielfältiget nämlich die Peripherie mit dem halben Durchmesser, d. i. dem Halbmesser, und theilet das Vielfache mit 2 (§. 154.)

z. B. die Peripherie sey = 628′
der Durchmesser = 200′ so ist
der Halbmesser = 100′.

Man erhält durch Vervielfältigung der Peripherie mit dem Halbmesser 62800′q. Dies wäre aber der Inhalt eines Parallelogrammes, von welchem das Dreieck die Hälfte ist (§. 133.). Daher muß man dieses Vielfache noch mit 2 theilen, wodurch man 31400′q erhält. Dieses Vielfache ist der Flächeninhalt des Dreiecks, dem der Kreis gleich ist, oder des Kreises selbst.

§. 158.

Wenn die Länge des Durchmessers und der Peripherie zusammen nicht bekannt ist, so muß man eines von beiden suchen. Das gewöhnliche Verhältniß des Durchmessers zum Umfange ist wie 100 zu 314. Dieses Ver-

hältnisses bedienet man sich zu Findung des Umfanges oder des Durchmessers.

Z. B. Es sey die Peripherie = 620′, so hat man die Sätze zu Findung des Durchmessers.

$$314 : 100 = 620 :$$

```
                 100
      314 | 62000 | 197 142/314 Länge des Durchmessers
          | 314.. |
            3060.
            2826.
             2340
             2198
              142
```

Oder es sey der Durchmesser = 96′, so sucht man die Peripherie

$$100 : 314 = 96 :$$

```
          96
        1884
       2826
   100|30144|301 44/100|11/25 Länge der Peripherie.
```

Weiß man nun beides, so vervielfältiget man die Peripherie $301\frac{11}{25}$ mit dem Halbmesser 48, und theilet das Vielfache mit 2; oder man vervielfältiget den Umfang gleich mit dem 4ten Theile des Durchmessers, d. i. 24. Hierdurch erhält man $7234\frac{14}{25}$′q, welches der Flächeninhalt des Kreises ist.

§. 159.

§. 159.

Einen Ausschnitt zu berechnen, dessen Bogen nach Längenmaaße gegeben worden.

Aufl. Man messe den Halbmesser nach gleichem Längenmaaße, vervielfältige ihn mit dem Bogen, und theile das Vielfache mit 2.

V. Von Aufnehmung der Felder.

§. 160.

Ehe man den Flächenraum eines ganzen Feldes berechnen kann, muß man dasselbe vorher aufnehmen, oder in Grund legen, d. i. eine Figur auf dem Papiere entwerfen, die der Figur des Feldes ähnlich ist.

§. 161.

Da es hiebei nöthig ist, daß die Enden der zu messenden Linien, und die Spitzen der Winkel auch in der Ferne sichtbar gemacht werden; so pflegt man in alle Ecken des aufzunehmenden Feldes, und in andere Punkte, welche mit in Anschlag kommen sollen, Stäbe einzustecken, welches man die Absteckung eines Feldes nennet. Kommen unter den Seiten des Feldes krumme Linien vor, so steckt man entweder mehrere Stäbe in dieselbe, und betrachtet sie als die Summe mehrerer geraden Linien, oder sieht dieselbe als eine gerade Linie an, und mißt ihre Abweichungen von derselben besonders. Wovon weiter unten.

§. 162.

Eine nöthige Vorbereitung zu Aufnehmung eines Feldes (deren man nur bei dem Gebrauche des Meßtisches entbehren kann) ist diese, daß man sich aus freier Hand einen ungefähren Entwurf desselben mache, wenigstens eine Figur, die eben so viele Ecken hat, als das Feld. Wenn man auch die Stäbe mit Buchstaben bezeichnet, und in die Ecken des Entwurfs eben dieselben setzt, so wird man sich desto leichter vor Verirrung in Acht nehmen können.

§. 163.

Fig. 84. n. 1. Wenn man ein Feld aufnehmen will, in welchem man allenthalben herumgeben kann; so verfährt man mit Stäben und Meßkette auf folgende Art:

Man bildet sich im Felde so viele Diagonallinien ein, daß dasselbe dadurch in lauter Dreiecke getheilt wird. Alle diese Linien zieht
n. 2. man in dem Entwurfe (a b c d e f). Alsdenn mißt man alle Seiten und Diagonalen, und schreibt das Maaß einer jeden in dem Entwurfe am gehörigen Orte. Wenn dies geschehen, so kann man das Feld leicht auf das Papier bringen. Man darf nur das Maaß jeder Linie nach dem verjüngten Maaßstabe nehmen, und damit die Dreiecke im Kleinen in der Ordnung, die der Entwurf anweiset, beschreiben und aneinander setzen.

Wenn

Wenn sonst noch etwas merkwürdiges, z. B. in H ein Brunnen auf dem Felde wäre, der mit in den Riß kommen soll, so denkt man sich aus der Spitze A eines Winkels durch H eine Linie AI bis zur gegenüberliegenden Seite DC, mißt AH und CI, und bemerkt ihr Maaß auf den in dem Entwurfe hiezu gezogenen Linien. Alsdenn kann man bei Auftragung des Feldes auch diese Linien am rechten Orte mit auftragen.

§. 164.

Wenn man aus einer Ecke A, oder aus einem andern Punkte O eines Feldes nach allen Ecken desselben sehen, und dahin messen kann; so kann man das Feld am kürzesten mit dem Meßtische aufnehmen. Fig. 85. n. 1 u. 2.

Man stellt denselben in die Ecke A, oder in den gewählten Standpunkt O, und zieht nach allen Ecken Linien. Alsdann mißt man von der gewählten Station nach jeder Ecke, trägt alle diese Linien nach dem verjüngten Maaßstabe auf, und verbindet ihre Enden; so wird die Figur sogleich im Kleinen aufgetragen.

§. 165.

Die bequemste Art, ein Feld in Grund zu legen, ist diese, wenn sich zwo Stationen finden lassen, aus deren jeder man alle Ecken des Feldes und die zwote Station sehen, auch ihre Entfernung von der erstern messen kann. Es können diese Stationen entweder zwo angrenzende Ecken des Feldes, oder zween beliebi- Fig. 86. n. 1. n. 2.

ge Punkte in demselben seyn. Die Aufnehmung geschieht mit dem Meßtische folgendermaaßen.

Man stellt denselben in die erste Station A, und ziehet nach allen Ecken des Feldes gerade Linien, so wie auch nach dem Stabe in der zwoten Station. Alsdenn mißt man A B, und trägt sie nach dem verjüngten Maaßstabe aus a in b. Hierauf steckt man in A einen Stab, und stellt den Meßtisch in B der Linie b a gemäß. Aus b ziehet man wiederum gegen alle Ecken des Feldes gerade Linien, welche die aus a gezogenen in c, d, e durchschneiden. Diese Punkte verbindet man durch Linien, welche die Seiten des Feldes sind. (§. 114)

n. 2. Auf gleiche Weise verfährt man, wenn die zwo Stationen im Felde selbst gewählet sind.

Anmerk. Eben dieser Methode kann man sich auch bedienen, wenn man einen Riß von einer nicht gar zu großen Gegend aufnehmen will. Anstatt der Stäbe, welche die Ecken des Feldes bezeichnen, dienen alsdann Thürme, und andere sich unterscheidende Punkte. Zu den Stationen wählet man zwo Anhöhen, aus welchen man nach allen diesen Punkten eine freie Aussicht hat, und mißt ihre Entfernung von einander besonders nach §. 122.

§. 166.

Fig. 87. Soll man ein Feld aufnehmen, in welchem man nicht umhergehen, und aus zween Ständen alle Ecken desselben sehen kann, weil es z. B. voller Buschwerk ist; so muß man dasselbe aus seinem Umfange aufnehmen,

d. i.

d. i. alle Seiten und Winkel des Feldes in ihrer Ordnung aufnehmen, und dadurch die Figur auf das Papier bringen. Man bedient sich hiezu des Meßtisches auf folgende Art.

Aus einer Ecke des Feldes A, wohin man denselben zuerst stellt, zieht man nach den beiden angrenzenden B und E gerade Linien, mißt die Seite AB, und trägt sie nach dem verjüngten Maaßstabe aus a in b. Darauf steckt man in A wiederum einen Stab, trägt den Meßtisch nach B, und stellt ihn daselbst der Linie ba gemäß. Alsdann mißt man BC, und trägt sie auf. So fährt man fort, bis sich die Figur in D schließt.

Anmerk. Auf diese Weise kann man einen Wald, Garten oder dgl. aufnehmen, sobald man aus jeder Ecke nach den beiden angrenzenden eine freie Aussicht hat.

§. 167.

Wenn man die Krümmung eines Flusses oder dgl. mit aufnehmen soll, so steckt man eine solche Linie als eine gerade ab, und mißt ihre Abweichungen von derselben. Z. B. Man setzt von a bis q eine gerade Linie, und steckt, so weit die Höhlung geht, von a bis e mehrere Stäbe ein in b, c, d e. Man mißt darauf sowohl die Abstände der Stäbe von einander, als auch von einem beliebigen Punkte o in a q. Wird nun die gerade Linie a q zu Papiere gebracht, so trägt man die von ihr ausgezogenen Linien o a, o b, o c u. s. f. nach dem verjüngten

Fig. 88.

jüngten Maaßstabe auf, und verbindet die dadurch gefundenen Punkte a, b, c, d, e der krummen Linie nach dem Augenmaße.

Wenn die krumme Linie nicht gar zu sehr von der geraden abweicht, so kann man in der Richtung aq die Meßkette ausspannen, und nach mehreren auf aq aufgerichteten Perpendikularlinien die Abweichungen der krummen Linie von der geraden blos mit einem Maaßstabe messen. Die Lage der senkrechten Linien bemerkt man sogleich auf der Meßkette, und kann sie daher nach dem verjüngten Maaßstabe richtig auftragen. Die Enden derselben sind alsdenn die Punkte, durch welche die krumme Linie gezogen werden muß.

VI. Von Berechnung und Eintheilung der Felder.

§. 168.

Fig. 89. Wenn ein Feld in Grund geleget worden, so ist es leicht, die Größe desselben zu finden. Man theilet nämlich das Feld in Dreiecke, berechnet jedes besonders, und zählet zuletzt ihre Inhalte zusammen. (§. 155.) Nur muß bei Messung der Grundlinien und Höhen einzelner Dreiecke eben derselbe Maaßstab gebraucht werden, womit man das Feld aufgenommen hat.

Es sey z. B. ein Feld ABCDEF auszurechnen, welches man in 4 Dreiecke getheilt hat, und AC = 96′, Bo = 32′, Dp = 56′,

AE

AE = 104′, Dr = 28′ und Fs = 36; so verfährt man auf folgende Art.

AC = 96	AC = 96	AE = 104	AE = 104
½Bo = 16	½Dp = 28	½Dr = 14	½Fs = 18
576	768	416	832
96	192	104	104
1536q.	2688	1456	1872

Das Dreieck ABC = 1536′q.
ACD = 2688
ADE = 1456
AEF = 1872

7552′q. d. i. 75° 52′q, welches der Flächeninhalt des ganzen Feldes ist.

§. 169.

Wenn das vorhin berechnete Feld in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, z. B. in 2 ge- Fig.
theilt werden soll, so kann man es mit Hülfe 90.
der Rechnung auf folgende Art verrichten.

Man muß vorher den Inhalt jedes einzelnen Dreiecks wissen. Um aber die Grösse eines jeden zu machenden Theiles zu bestimmen, theile man den Inhalt des ganzen Feldes 7552′q. durch die Zahl der Theile 2, so bekömmt man für jede Hälfte 3776′q. Soll nun der Anfang von der Seite des Dreiecks ABC gemacht werden, so fehlen demselben 2240′q. Wenn man diese als den Inhalt eines Dreieckes betrachtet, dessen Grundlinie

AC

AC wäre; so erfährt man die Höhe dieses, Dreieckes, wenn man diesen Inhalt 2240'q durch die halbe Grundlinie 48' theilt, (§. 154) wodurch man $46\frac{2}{3}'$ erhält. Dieser Antheil ist die Höhe des Dreieckes, welches auf der Grundlinie AC dem Dreiecke ABC zugelegt werden muß. In der Weite dieses Antheils $46\frac{2}{3}'$ ziehe man mit AC eine Parallellinie pq, und verbinde pA, so ist ABCp = 1536 + 2240 = 3776' = $\frac{1}{2}$ des Feldes.

Auf eben diese Art kann man leicht ein Feld in mehrere gleiche Theile eintheilen, oder ein so grosses Stück von demselben abschneiden, als man will. Auch würde man auf eine ähnliche Weise verfahren müssen, wenn verlangt würde, ein Feld, in welchem an einem gewissen Orte z. B. ein Brunnen wäre, in eine gewisse Anzahl gleicher Theile dergestalt einzutheilen, daß ein jeder Besitzer auf seinem Grunde und Boden zu dem Brunnen kommen könnte. Wenn das Feld vorher richtig aufgenommen, und der Ort des Brunnens in dem gemachten Risse genau bezeichnet worden ist; so kann man aus dem Mittelpunkte des Brunnens nach jeder Ecke der Figur Linien ziehen, und dadurch dieselbe in Dreiecke theilen. Alsdann berechnet man jedes Dreieck besonders, zählet ihre Inhalte zusammen, und sieht zu, wie groß ein jeder Theil werden müsse. Darauf verfährt man wie vorhin.

Der Geometrie
Dritter Theil.
Von den Körpern.

§. 170.

Dieser Theil der Geometrie (die Stereometrie) betrachtet die Körper theils nach ihrem körperlichen Inhalte, theils nach den Flächen, worein sie eingeschlossen sind.

§. 171.

Die Lage einer jeden Ebene wird durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, bestimmt. Nimmt man nur einen Punkt an, so läßt sich die Ebene nach allen Seiten zu um denselben drehen, ohne daß sie eine bestimmte Lage hätte. Nimmt man zween Punkte an, so läßt sich zwischen denselben eine gerade Linie gedenken, um welche sich die Ebene wiederum nach verschiedenen Seiten drehen läßt. Wird hiezu noch der dritte Punkt angenommen, der mit den beiden vorigen nicht in eben derselben geraden Linie liegt; so ist die Lage der Ebene völlig bestimmt.

§. 172.

Wenn zwo Ebenen so gegen einander liegen, daß sie sich auf keiner Seite einander nähern, so nennet man sie parallele Ebenen.

§. 173.

Ein jeder Körper wird durch Flächen begrenzt. Eine einzige ebene Fläche kann keinen Körper einschliessen; wohl aber eine einzige krumme Fläche, wie das Beispiel der Kugel beweiset. Es werden wenigstens vier Ebenen dazu erfordert, wenn durch dieselben ein Körper von allen Seiten eingeschlossen werden soll.

§. 174.

Die ebenen Flächen, welche den Körper einschliessen, heissen seine **Seitenflächen.** Der Körper selbst, welcher von allen Seiten durch lauter Ebenen begrenzt wird, heißt ein **eckigter Körper**, und die Ebenen bilden durch ihre Lage gegen einander, das, was man einen körperlichen Winkel, oder eine **Ecke** nennet.

§. 175.

Eine von den ebenen Flächen, welche den Körper begrenzen, wird in Ansehung ihrer Lage gegen die übrigen die **Grundfläche** desselben genannt. Die gerade Linie aber, welche auf der Grundfläche senkrecht steht, und bis an die gegenüber stehende Seite oder Ecke des Körpers reicht, zeigt die **Höhe** desselben an.

§. 176.

Sind die Ebenen, welche den Körper von allen Seiten einschliessen, einander gleich, so heißt der Körper **regulär**, sind sie aber ungleich, **irregulär.**

§. 177.

Wenn alle einzelne ebene Flächen, die den Körper begrenzen, auf einer Ebene an einander gelegt werden, so wird die ganze Figur, welche daraus entsteht, das Netz des Körpers genannt.

§. 178.

Die Grösse eines Körpers hängt von seiner Länge, Breite und Dicke ab. (§. 2.) Körper sind daher gleich groß, wenn sie bei gleicher Länge in allen Theilen der Länge eine gleiche Breite und Dicke oder Höhe haben; welches leztere durch die Grösse der Figur bestimmt wird, welche entsteht, wenn man den Körper senkrecht auf seine Länge durchschneidet.

I. Von den Pfeilern.

§. 179.

Der Pfeiler (das Prisma) ist ein Körper, welcher theils in zwo einander gleiche und parallele Ebenen, theils in Parallelogramme eingeschlossen ist, welche die gleichgelegenen Seiten jener Ebenen verbinden.

Diese Ebenen heissen die Grundflächen des Pfeilers, und er selbst wird nach der Gestalt derselben, drei=, vier=, oder mehreckig genannt.

Der senkrechte Abstand einer Grundfläche von der andern macht die Höhe desselben aus.

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

Wenn die Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht stehen, so nennet man den Körper einen **geraden**, sonst aber einen schiefen Pfeiler.

§. 180.

Wenn die Grundflächen eines Pfeilers Rechtecke sind, so nennet man ihn einen **rechtwinklichten Pfeiler** (ein Parallelepipedum). Dieser Körper ist von sechs Rechtecken eingeschlossen, von welchen die gegenüberstehenden gleich sind. Er wird auch ein Balken genannt, wenn er auf einer seiner langen Flächen ruhet.

§. 181.

Sind sowohl die Grund- als auch die Seitenflächen lauter gleiche Quadrate, so heißt der Pfeiler ein **Würfel** (Cubus). Sind alle Ebenen lauter gleiche Rautenflächen, so nennet man diesen Pfeiler einen **verschobenen Würfel**, oder die körperliche Raute.

§. 182.

Wenn die Grundflächen eines Pfeilers Kreise sind, und die Seitenflächen aus einer einzigen krummen in sich laufenden Fläche bestehen, welche jene zween Kreise mit einander verbindet; so wird dieser Pfeiler eine **Walze** (ein Cylinder, eine Säule), die gerade Linie aber, welche die Mittelpunkte seiner Grundflächen verbindet, die Axe derselben genannt.

Wenn

Wenn die Axe die Grundflächen senkrecht trift, so heißt der Pfeiler ein gerader, sonst aber ein schiefer Cylinder.

§. 183.

Wenn zween Pfeiler eine gleiche Grundfläche und Höhe haben, so sind sie von gleichem körperlichen Inhalte; und wenn man die Verhältnisse der Grundflächen und Höhen durch Zahlen ausdrückt, so verhalten sich alle Pfeiler unter einander, wie die Vielfache der Grundfläche eines jeden mit seiner Höhe.

Wenn man die Länge der Grundfläche eines z. B. rechtwinklichten Pfeilers in gleiche Theile, z. B. in 4 eintheilt, und diesen Körper darnach in geraden mit den Seitenflächen parallelen Linien durchschneidet; so wird dadurch der Pfeiler selbst in 4 kleine Pfeiler getheilt. Theilet man ebenfalls auch die Breite der Grundfläche in gleiche Theile, z. B. in 3, und durchschneidet darnach den Pfeiler; so wird jeder der 4 kleinen Pfeiler in 3 kleinere getheilt. Da also die Grundfläche 12 Rechtecke enthält, so muß der darnach durchschnittene Pfeiler 12 kleinere rechtwinklichte Pfeiler enthalten. Theilet man endlich auch die Höhe desselben in gleiche Theile, z. B. in 10, und durchschneidet darnach wiederum den Körper; so wird jeder der 12 kleineren Pfeiler in 10 noch kleinere getheilt. Der ganze Pfeiler enthält daher 120 kleinere Pfeiler.

Wie sich also die Vielfache der Grundfläche eines jeden Pfeilers mit seiner Höhe verhält, so verhalten sich die Pfeiler selbst unter einander: und zween Pfeiler sind gleich groß, wenn sie gleiche Grundfläche und Höhe haben.

§. 184.

Da die Grundflächen der Würfel Quadrate sind, und sich wie die Quadratzahlen ihrer Seiten verhalten (§. 136.): so verhalten sich die Würfel unter einander, wie die Cubikzahlen ihrer Seiten. Wenn z. B. die eine Seite der Grundfläche des Würfels 4 Theile enthält, so ist der Inhalt derselben 16. Da nun auch die Höhe des Würfels einer jeden Seite seiner Grundfläche gleich ist, so enthält der ganze Würfel 4 mal 16, d. i. 64 kleinere Würfel. Die Zahl 64 ist die Cubikzahl von 4. Daher urtheilt man, wie der Satz sagt.

II. Von den Pyramiden.

§. 185.

Die Pyramide (Spitzsäule) ist ein Körper, der theils in eine Ebene, von welcher Gestalt sie sein mag, und welche die Grundfläche derselben heißt, theils in mehrere Dreiecke eingeschlossen ist, welche die Seiten der Grundfläche mit einem ausser ihr liegenden Punkte, der die Spitze der Pyramide genannt wird, verbinden. Nach der Gestalt der

der Grundfläche bekommt sie den Namen einer drei-, vier-, oder mehreckigten Pyramide. Ihre Höhe ist der senkrechte Abstand der Spitze von der Grundfläche.

§. 186.

Wenn die Grundfläche der Pyramide ein Kreis ist, und sich daher jene Dreiecke in eine einzige krumme in sich laufende Fläche verlieren; so nennet man dergleichen runde Spitzsäule einen **Kegel**. Die gerade Linie, welche von der Spitze zum Mittelpunkte der Grundfläche geht, heißt die Axe desselben. Trift seine Axe die Grundfläche senkrecht, so nennet man ihn einen **geraden**, sonst aber einen **schiefen** Kegel.

§. 187.

Wenn eine Pyramide, oder ein Kegel, mit der Grundfläche parallel durchschnitten wird, so heißt das untere, zwischen der Grund- und Durchschnittsfläche befindliche Stück, eine **abgekürzte Pyramide**, oder ein **abgekürzter** (abgestumpfter) **Kegel**.

§. 188.

Aus mehreren gleichen Pyramiden können verschiedene reguläre Körper zusammen gesetzt werden, in denen die Spitzen der Pyramiden, aus welchen sie bestehen, alle gegen einander gekehrt sind.

Hieher gehören:

1) Das körperliche Viereck, welches aus 4 gleichen dreyeckigten Pyramiden zusammengesetzt ist, oder von 4 gleichen gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird.

2) Das Achteck, welches aus 8 gleichen dreieckigten Pyramiden besteht, oder in 8 gleiche gleichseitige Dreiecke eingeschlossen ist.

3) Das Zwölfeck, welches aus 12 gleichen fünfeckigten Pyramiden zusammen gesetzt ist, oder von 12 gleichen regulären Fünfecken begrenzt wird.

4) Das Zwanzigeck, welches aus 20 gleichen dreieckigten Pyramiden besteht, oder von 20 gleichen gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen ist.

Anmerk. Diese genannten Körper, nebst dem Sechseck oder Würfel, sind die 5 eigentlich regulären Körper.

Der Archimedische Körper ist in 18 gleiche Quadrate, und 8 gleiche Dreiecke eingeschlossen, oder aus 18 gleichen viereckigten, und aus 8 gleichen dreieckigten Pyramiden zusammen gesetzt.

§. 189.

Wenn zwo Pyramiden gleiche Grundflächen und Höhen haben, so sind sie von gleichem körperlichen Inhalte.

§. 190.

§. 190.

Da ein dreieckigter Pfeiler in drei gleiche Pyramiden getheilt werden kann, so ist die Pyramide jederzeit der dritte Theil von einem Pfeiler, mit welchem sie gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Dieses gilt von jeder Pyramide, von welcher Gestalt auch ihre Grundfläche seyn mag, weil sowohl vieleckigte Pfeiler, als Pyramiden, sich auf dreieckigte bringen lassen, welche die begehrte Eigenschaft haben.

Da man auch den Kegel für eine Pyramide von unzählig vielen Ecken halten kann, so muß derselbe ebenfalls der dritte Theil von einem Cylinder seyn, mit welchem er gleiche Grundfläche und Höhe hat.

III. Von der Kugel.

§. 191.

Die Kugel (Sphäre) ist ein Körper, der in eine einzige krumme Fläche eingeschlossen ist, welche überall von einem Punkte gleich weit absteht. Dieser heißt der Mittelpunkt der Kugel, die gerade Linie von ihm zur Kugelfläche, der Halbmesser, diejenige aber, welche von einem Punkte der Kugelfläche durch den Mittelpunkt bis zu einem andern geht, der Durchmesser.

§. 192.

Wenn man die Kugel um einen ihrer Durchmesser herumdrehet, so kommt zwar jeder Theil der Kugelfläche nach und nach in die Stelle eines andern, in der Lage der ganzen Fläche aber wird dadurch nichts verändert.

§. 193.

Wenn man die Kugel durch ihren Mittelpunkt in einer geraden Linie durchschneidet, so wird sie dadurch in zween gleiche Hälften getheilt, welche man Halbkugeln nennet.

§. 194.

Jeder Kreis, dessen Halbmesser oder Durchmesser zugleich der Kugel ihrer ist, wird ein größter Kreis der Kugel genannt. Alle andere Kreise, die mit demselben Parallelkreise sind, sind desto kleiner, je weiter sie vom größten Kreise abliegen. Ein Durchmesser, der die Mittelpunkte aller dieser Parallelkreise trift, heißt die Axe derselben, und der Kugel selbst. Die Endpunkte der Axe werden die Pole genannt.

§. 195.

Die Kugel ist einem Kegel gleich, dessen Grundfläche die Kugelfläche, und dessen Höhe der Halbmesser derselben ist.

Man kann sich die Kugel als einen, aus unendlich vielen Kegeln zusammen gesetzten Körper vorstellen, deren Spitzen alle im Mittel-

telpunkte der Kugel zusammen kommen. Ihre Summe giebt einen großen Kegel, dessen Grundfläche die ganze Oberfläche der Kugel in sich begreift. Seine Höhe ist die Höhe eines der kleinen Kegel, oder der Halbmesser der Kugel.

IV. Vom körperlichen Maaße und der Berechnung der Körper.

§. 196.

Zum Maaße eines Körpers muß ebenfalls ein Körper genommen werden. Der Bequemlichkeit wegen bedient man sich dazu des Würfels, dessen Seite eines von den gewöhnlichen Längenmaaßen ist, z. B. 1 Ruthe, 1 Meile u. dgl. Von dieser Seite bekommt der Würfel den Namen einer Cubikruthe, Cubikmeile u. dgl. Um das körperliche Maaß von andern zu unterscheiden, setzt man ein c dabei, so daß z. B. 48′c acht und vierzig Cubikfuß anzeigen.

§. 197.

Weil eine Cubikruthe Länge, Breite und Dicke in sich faßt, so hat sie im geometrischen Körpermaaße 10 mal 10 mal 10 Fuß, d. i. 1000. Ein Cubikfuß enthält 1000 Cubikzolle u. s. f.

Wenn man daher eine Zahl nach der geringsten unter ihnen lesen soll, so muß man, daferne keine dazwischen fehlen, oder die feh-

lenden durch Nullen ersetzt worden, jederzeit 3 Ziffern von der Rechten gegen die Linke abschneiden, z. B. 231789042″c sind = 231°, 789′, 42″c.

Aufgaben.

§. 198.
Einen jeden Pfeiler zu berechnen.

Aufl. Man berechne zuerst seine Grundfläche (§ 155. und § 157.) und meße nach eben demselben Längenmaaße die Höhe. Wenn man nun beide Zahlen mit einander vervielfältiget, so wird das Vielfache anzeigen, wie viel solcher Würfel, deren Seite man zum Maaße genommen, in dem Pfeiler enthalten sind. Wenn z. B. die Grundfläche = 48′q und die Höhe = 10′ wäre, so ist der Inhalt 480′c.

§. 199.
Einen Würfel zu berechnen.

Aufl. Man meße eine Seite deßelben, vervielfältige sie mit sich selbst, und ihr Quadrat nochmahls mit ihr. (§ 184)

Anmerk. Wenn der körperliche Inhalt eines Würfels gegeben worden, und man die Länge einer Seite deßelben wißen will, so muß man aus dem gegebenen Inhalte die Cubikwurzel ausziehen. Auf diese Art läßt sich auch die Seite eines Würfels finden, welcher doppelt

so

so groß ist, als ein gegebener Würfel. Man verdoppelt nämlich den Inhalt des gegebenen Würfels, und zieht aus dem Vielfachen die Cubikwurzel, welche die Länge einer Seite des verlangten Würfels anzeigt.

§. 200.

Den Inhalt aller Flächen eines Pfeilers zu berechnen.

Aufl. Man sucht den Inhalt einer Grundfläche und nimmt ihn doppelt. Darauf berechnet man bei einem dreieckigten Pfeiler eine Seitenfläche (wenn sie alle gleich sind) nimmt ihren Inhalt dreifach, und zählet beides zusammen.

Ist der Pfeiler rechtwinklicht, so sucht man den Inhalt seiner Grundfläche, und zwoer angrenzenden Seitenflächen (daferne sie nicht alle gleich sind;) nimmt den Inhalt jeder Fläche doppelt, und zählet die Vielfache zusammen.

Ist derselbe ein Würfel, so berechnet man eine seiner Flächen, und vervielfältiget ihren Inhalt mit 6.

Ist derselbe ein Cylinder, so berechnet man seine Grundfläche, nimmt ihren Inhalt doppelt, und zählet das Vielfache zu der Seitenfläche, welche man wie ein Rechtek berechnet, deßen Grundlinie dem Umfange der Grundfläche, und deßen Höhe der Höhe des Cylinders gleich sind.

§. 201.

§. 201.

Eine jede Pyrämide zu berechnen.

Aufl. Man vervielfältiget die Grundfläche mit der Höhe, theilet aber das Vielfache mit 3. (§ 190)

§. 202.

Die Fläche einer Kugel zu berechnen.

Aufl. Man meße ihren Durchmeßer, suche den Umfang des größten Kreises (§ 158), und vervielfältige beides mit einander.

§. 203.

Den körperlichen Inhalt einer Kugel zu finden.

Aufl. Man suche ihre Fläche, vervielfältige sie mit dem Halbmeßer, und theile das Vielfache mit 3. (§ 195 § 201).

§. 204.

Netze zu zeichnen, aus welchen man die geometrischen Körper zusammen legen kann.

1) Netz des Würfels.

Fig. 91. Man trage auf die Linie AB die Seite eines Würfels AI viermal, so daß AI = IL = LN = NB, und richte aus A eine senkrechte Linie AC = AI auf. Dann ziehe man die Linien IK, LM, NO, mit AC parallel, und verlängere eine dieser Linien z. B. IK auf beiden Seiten nach E und F so daß IE = KF = AI, und beschreibe damit noch zwei Quadrate.

2 Netz

2) Netz eines rechtwinklichten Pfeilers. Fig. 92.
Man trage auf die Linie BD aus B in H die Breite, aus H in I die Länge, aus I in K nochmals die Breite und aus K in D die Länge des Pfeilers. Aus B richte man seine Höhe BA senkrecht auf, und beschreibe dann das Rechtek ABCD. Darauf ziehe man EH, FI, GK, mit AB parallel, und verlängere EH auf beiden Seiten nach L und N, desgleichen FI nach M und O, so daß LE, MF, HN, und IO = BH werden, und ziehe endlich die Linien LM und NO.

3) Netz eines dreieckigten Pfeilers. Fig. 93.
Man trage auf CF die Seiten der Grundfläche CG, GH, HF, und beschreibe auf CF das Rechtek ACEF, deßen Höhe CA der Höhe des Pfeilers gleich ist. Auf BD und GH richtet man, wenn die Seiten der Grundfläche gleich sind, gleichseitige Dreiecke auf.

4) Netz einer Walze. Fig. 94.
Man beschreibe ein Rechtek CBEF, deßen Höhe BC dem Durchmeßer, und deßen Länge CF dem Umfange der Grundfläche gleich ist. Dann verlängere man BC auf beiden Seiten nach A und D, so daß AB = BC = CD ist. Aus der Mitte von DC und BA beschreibe man die Kreise der Grundflächen des Cylinders.

5) Netz

Fig. 95. 5) Netz einer Pyramide.
Man beschreibe aus A mit der Seite derselben einen Bogen EB, trage darein die Linien des Umfangs von der Grundfläche ED, DC, CB, und ziehe die Linien AE, AD, AC, AB. Darauf beschreibe man auf DC die Grundfläche der Pyramide.

Fig. 96. 6) Netz eines Kegels.
Man beschreibe aus A einen Bogen DB, ziehe die Linien AD, AB, und setze daran einen Kreis, deßen Umfang dem Bogen DB gleich sey.

Fig. 97. 7) Netz des körperlichen Viereckes.
Man beschreibe ein gleichseitiges Dreiek ABC, theile die Seiten deßelben in zween gleiche Theile in D, E und F, und ziehe die Linien, DE, EF, FD.

Fig. 98. 8) Netz eines Achteckes.
Man mache es wie vorhin, ziehe aber die Seite AC fort bis G, BC bis H, und ED bis L, so daß CG = DC, CH = CF, DI = IL = ED. Dann ziehe man noch die Linien GL, CI und IH.

Fig. 99. 9) Netz eines Zwölfeckes.
Man beschreibe ein reguläres Fünfek ABCDE, lege das Lineal an D und B, und ziehe die Linie BL, desgleichen an DA, und ziehe AG, mache AG = BL = AB. Darauf beschreibe man aus G und L Kreisbogen

mit

mit Eröfnung von AB, wodurch man den Punkt Q findet, wohin man die noch fehlenden Seiten des Fünfeckes ABLQG ziehet. Auf diese Weise hänget man 12 reguläre Fünfecke an einander.

10) Netz des Zwanzigeckes. Fig. 100.

Man beschreibe ein gleichseitiges Dreieck ACB, verlängere die Seite AB bis D, und trage sie noch viermal darauf. Dann ziehe man CE mit AD parallel, und mache CI = IK = KL = ML = ME = AB. Darauf verlängere man AC bis N, so daß NC = CA, lege das Lineal an B und I, F und K u. s. f. und ziehe die Linien YO, SP, TQ u. s. f. lege abermals das Lineal an DM, HL u. s. f. und ziehe die Linien DQ, XP u. s. f. Endlich mache man MR = ME, BY = BA, und ziehe die Linien RE und AY.

11) Netz des Archimedischen Körpers. Fig. 101.

Man trage auf die Linie AB 8 gleiche Theile AE = EV = VT u. s. f. Aus A richte man eine senkrechte Linie AC = AE auf, und beschreibe das Rechtek ACDB. Dann ziehe man aus E, D, T u. s. f. mit AC Parallellinien, verlängere AC auf beiden Seiten bis R und N, so daß CP = PR = AL = LN = AC, und beschreibe die Quadrate CFPQ, AELM u. s. f. Auf FG und EV richte man gleichseitige Dreiecke auf,

auf, auf GH und VT aber Quadrate, auf HI und TK wiederum gleichseitige Dreiecke u. s. f.

Fig. 12) Netz einer Kugel.
102. Man theile eine Linie AB in 30 gleiche Theile, deren 12 auf den Umfang der Kugel gehen, und durchschneide die Bogen CDE, FGH u. s. f. desgleichen CIE, FDH u. s. f. mit einem Halbmeßer von 10 solchen Theilen.

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

Folgende Druckfehler sind bemerket worden.

§. 2. Zeile 3 statt die, lies Die
10 st. veränderlicher l. veränderter

§. 32. Bew. n. 2. Z. 2. muß heißen: so muß, wenn o=r, auch x=r seyn.

— n. 3. Z. 1 u. 2 muß heißen n+x=180° (§. 27) und n+r=180° (nach der Voraussetzung)

§. 46 n. 3. Z. 4 st. wird l. werden

§. 57. Z. 1 st. zween l. zwoen

§. 101. n. 6. Z. 3 st. deshalb l. des halb

§. 106 Z. 8. st. durch l. Durch

§. 108. Z. 1. st. Liniengrößen l. Linien Größen

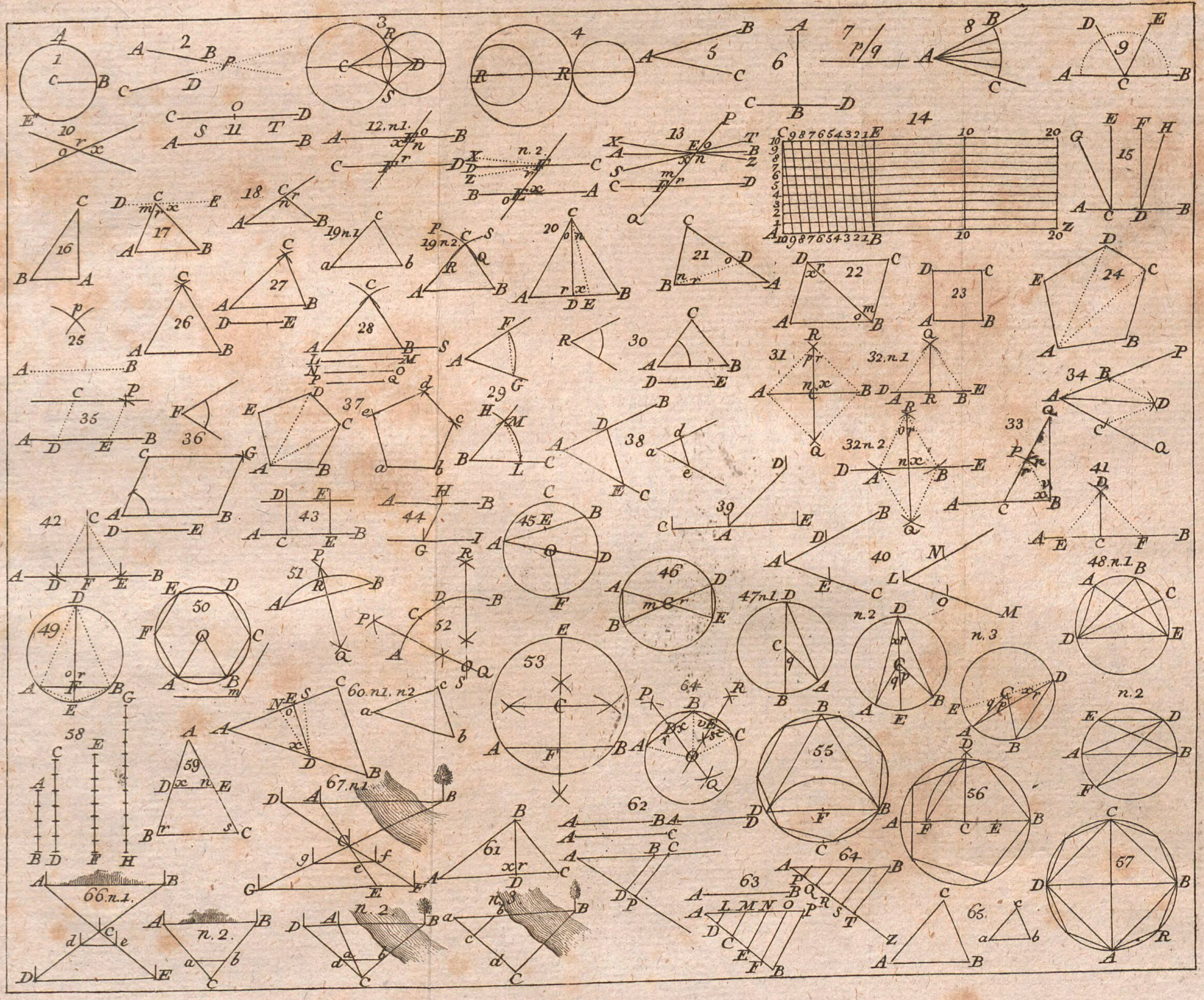
§. 109. Z. 2 nach der einen: ist ausgelaßen: den Winkeln der andern

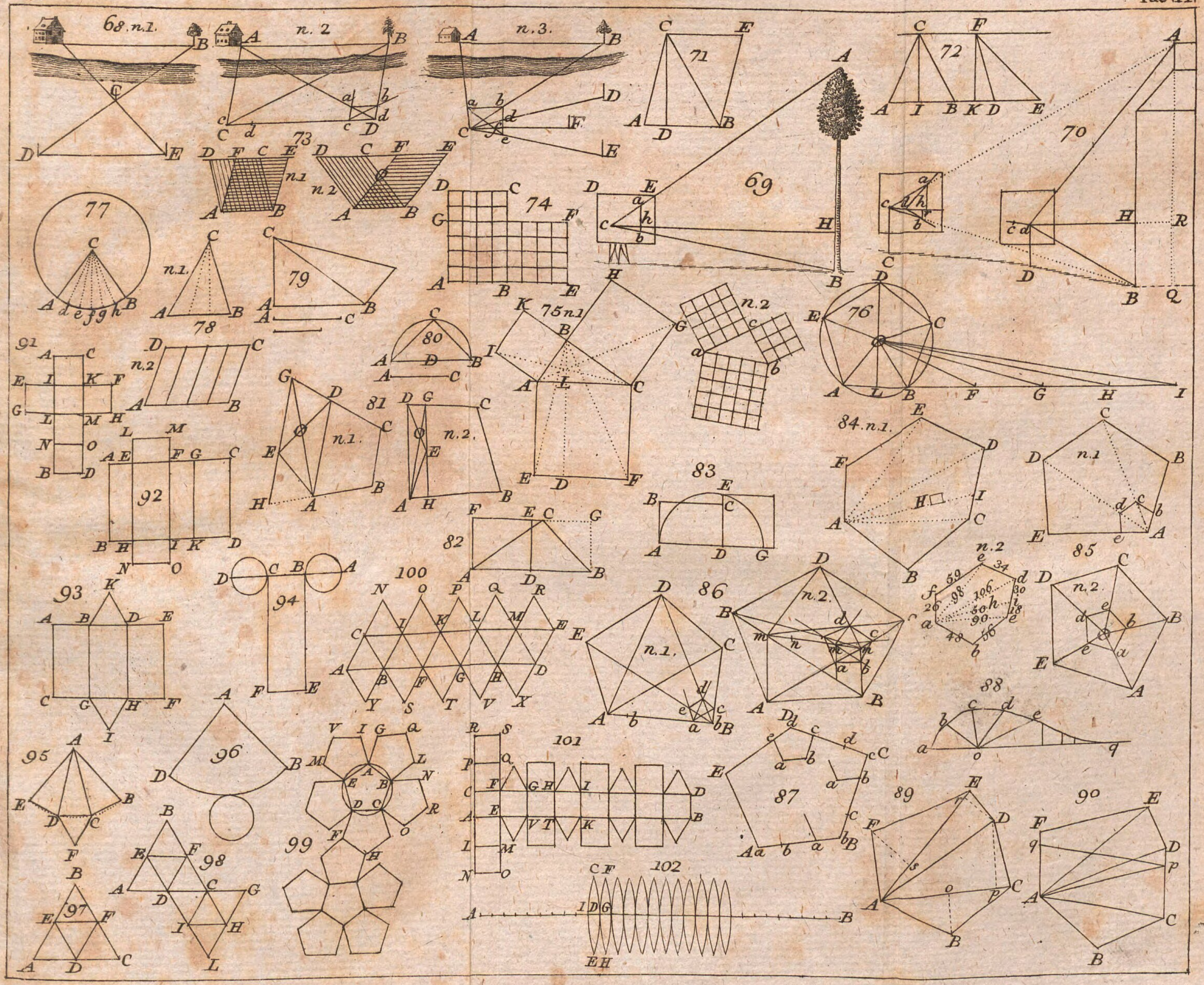
§. 112. n. 2. Z. 1 st. zween l. zwoen

§. 135. Z. 8 st. vielfache – verhalte l. vielfache – verhalten

§. 183. Z. 3 st. verhält l. verhalten.

Tab. I.




68. n.1.
n. 2
n. 3.
69
70
71
72
73
n.1
n.2
74
75 n.1
n.2
76
77
78
n.1.
n.2
79
80
81
n.1.
n.2.
82
83
84. n.1.
n.2
85
n.1
n.2.
86
n.1.
n.2.
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Rohrlack, J. C.

Anfangsgründe der Geometrie nebst Anwendung derselben auf die Feldmeßkunst

Potsdam 1783

Math.p. 6
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081378-8
VD18 1194238